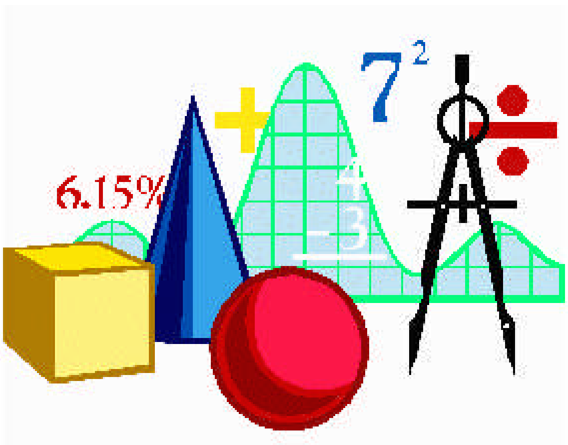
UNE PUBLICATION DESTINÉE AUX ÉCOLES DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN DE LA RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL APPROUVÉE PAR LE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

Livre de Mathématique

Introduction à l'algèbre et à la géométrie

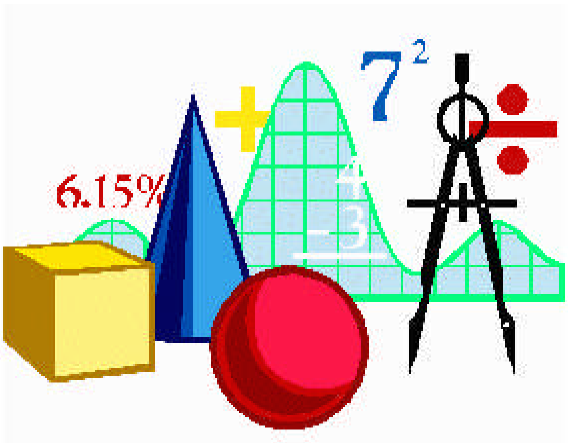


Niveaux 4^e et 3^e

UNE PUBLICATION DESTINÉE AUX ÉCOLES DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN DE LA RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL APPROUVÉE PAR LE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

Livre de Mathématique

Introduction à l'algèbre et à la géométrie



Niveaux 4^e et 3^e

RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

Livre de Mathématique

Introduction à l'algèbre et à la géométrie

Niveaux 4^{e} et 3^{e}

<u>Éditeur en Chef</u>
Johnny L. Houston, Ph.D.

<u>Assistant Éditeur en Chef</u>
Abdou M. Sène, Ph.D.

<u>Auteur</u>
Johnny L. Houston, Ph.D.

<u>Auteur Contributeur</u>
Andrea Lawrence, Ph.D.

<u>Auteurs Adaptateurs</u>
Mangary Ka Joseph Sarr

<u>Consultants</u>
Samba Fall Pape M. Sow

<u>Traducteurs</u>
Abdou Maty Sène, Ph.D.
Mame Ousmane Sarr, Ms., MCP

<u>Graphiste/ Illustrateur</u>
Randolph Harris

Programme des Manuels Scolaires et Autres Outils d'Apprentissage
TLMP ECSU - Sénégal
Elizabeth City State University (ECSU)
Elizabeth City, Caroline du Nord 27909 (USA)

Un Projet pour le Gouvernement du Sénégal - Financé par L'Initiative pour l'Éducation en Afrique AEI de l'USAID
Programme des Manuels Scolaires et Autres Outils d'Apprentissage TLMP

Ont contribué :

Mouhamadou Charles	WADE	**Conseiller pédagogique IA Dakar**
Papa Mamour	TOURE	**Conseiller pédagogique IA Dakar**
Mamadou	FALL	**Conseiller pédagogique IA Thiès**
Latyrol	FAYE	**Conseiller pédagogique IA Thiès**
Mamadou Ouleye	BA	**Conseiller pédagogique IA Louga**
Hamet Aly	GUEYE	**Conseiller pédagogique IA Saint Louis**
Mam Bouh	TOURE	**Conseiller pédagogique IA Matam**
Issakha	FAYE	**Conseiller pédagogique IA Tambacounda**
Moussa	FAYE	**Conseiller pédagogique IA Fatick**
Landing	DIEME	**Conseiller pédagogique IA Ziguinchor**
Alioune	DIOP	**Inspecteur de spécialité IA Saint – Louis**
Seybatou	GUEYE	**Inspecteur de spécialité IA Kaolack**
Niowy	FALL	**Inspecteur de spécialité IA Dakar**
Amadou	KONE	**Inspecteur de spécialité IA Dakar**
Daouda Laye	SECK	**Conseiller d'orientation**
Aliou	DIABAN	**Professeur au CEM de Mbour**
Déthié	BA	**Direction de l'Enseignement Moyen et Secondaire Général**
Aminata	DIOP	**Direction de l'Enseignement Moyen et Secondaire Général**
Samba	DABO	**Coordonnateur Pédagogique National de Mathématique**

Sous la validation scientifique de :

Monsieur Mamadou Bachir DIAHAM , Coordonnateur du Collège Mathématiques de l'IGEN

ISBN 978-0-9797743-2-4

Table des Matières

Préface

Chers élèves,

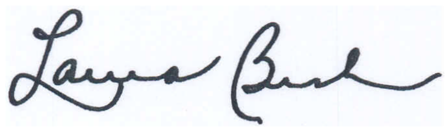
Ce manuel est un don du peuple des Etats-Unis d'Amérique pour les élèves du Sénégal. À travers l'Initiative pour l'Éducation en Afrique du Président Bush, ce livre a été élaboré et produit par Elizabeth City State University (ECSU) aux USA en collaboration avec le Ministère de l'Éducation et les équipes techniques du Sénégal.

L'éducation est essentielle pour l'amélioration des conditions de vie des communautés dans tous les pays du monde, et les manuels scolaires et autres outils d'apprentissage sont primordiaux pour une bonne éducation. Leurs excellences Président George W. Bush et Président Abdoulaye Wade croient fortement que le développement de l'éducation de nos jours peut promouvoir la liberté, la prospérité et une meilleure santé des populations des générations à venir. Le peuple américain est fier de collaborer avec le gouvernement du Sénégal pour améliorer les conditions de vie des enfants par le biais de l'éducation.

Vous êtes l'avenir du Sénégal. Nous vous encourageons à apprendre et continuer à vous informer, autant que possible, pour bâtir votre futur et pour apporter votre contribution au développement de votre communauté.

Avec mes meilleurs souhaits et prières,

La Première Dame des Etats-Unis d'Amérique



Avant-propos

Ce manuel est le fruit de la coopération sénégalo américaine. C'est une production de Elizabeth City State University (ECSU) aux USA et d'experts sénégalais.
Il est dès lors riche de l'approche américaine faite de pragmatisme et de simplicité et de l'approche sénégalaise soucieuse de rigueur et de précision. Les auteurs ont réussi une synthèse harmonieuse qui donne cet intéressant produit d'appoint au style direct et dépouillé.

Ce manuel est destiné aussi bien aux élèves qu'aux professeurs. Il est structuré autour de quatre thèmes déclinés chacun en cinq leçons. Les deux premiers thèmes portent sur l'algèbre et les deux autres sur la géométrie. Ces thèmes couvrent une partie du programme de quatrième et une partie du programme de troisième avec quelques légers débordements voulus.

Chaque leçon est organisée en trois moments. Le premier moment intitulé *«Le sais-tu ?»* invite l'élève à confronter ses représentations et ses acquis, à quelques notions clefs. Le deuxième moment est celui de l'exposé des notions, de l'apprêt. Le troisième intitulé *« activité »* est celui des exercices. Ce format améliore la lisibilité et facilite l'appropriation des contenus par les élèves.

Aussi intéressant soit-il, ce manuel ne doit pas être pris pour ce qu'il n'est pas. Il n'est ni le programme de quatrième ni celui de troisième. Il n'est le manuel de base ni de la classe de quatrième ni celui de troisième. De même, il ne doit pas être pris pour un modèle officiel de format de cours. L'approche par des situations- problèmes pertinentes amenant les élèves à entrer dans le jeu, à se l'approprier, et à découvrir eux-mêmes les notions reste ce que nous recommandons.

Ce manuel est plutôt un manuel d'appoint (un complément), une sorte d'aide mémoire pour l'élève, une source d'inspiration de simplicité pour le jeune professeur. Il devrait aussi être pour l'élève et pour l'enseignant l'occasion de se frotter à d'autres types d'exercices, enrichissant ainsi leur répertoire des problèmes possibles.

L'élève de quatrième peut s'en tenir exclusivement aux notions abordées en classe ; cependant les plus avancés peuvent se familiariser déjà avec les notions et exercices de troisième. Le professeur ne doit pas perdre de vue le fait que dans notre système nous n'avons pas la culture d'un manuel pour deux niveaux. Un accompagnement de l'élève dans l'utilisation du manuel est plus que nécessaire ; nous éviterions ainsi un désintérêt de l'élève de quatrième du manuel suite à des blocages répétés.

Nous souhaitons à tous, élèves et professeurs, une bonne et large utilisation de ce manuel pour un enseignement/apprentissage des mathématiques plus attractif et plus performant.

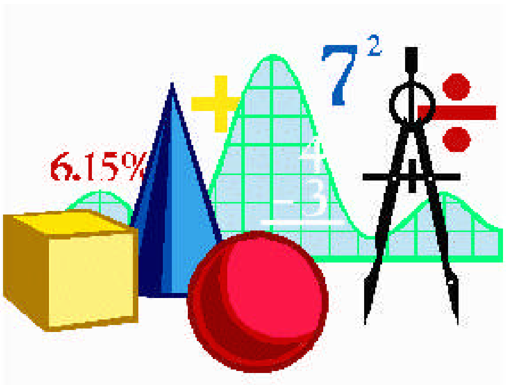
Mamadou Bachir Diaham

Coordonnateur du Collège Mathématiques de l'IGEN

Niveaux
4^{e} et 3^{e}

1^{ere} partie :

Algèbre



Thème I : Les fondements de l'algèbre :
Les nombres, les équations et les graphiques

Leçon 1 : Les nombres et leurs propriétés

Le sais-tu ?

Sais-tu que les nombres sont des éléments que tous les domaines des mathématiques utilisent pour une communication efficace des études quantitatives ? Ils s'écrivent le plus souvent avec des chiffres. Sais-tu qu'il est important de connaître les propriétés des différents nombres ?

Rappelons d'abord ce qu'est un ensemble. Un **ensemble**, généralement représenté par une lettre majuscule, est une collection bien définie d'objets. A $\subset$B signifie que A est un **sous-ensemble** de B ; cela veut dire que tous les éléments de A sont aussi des éléments de B.

Les **nombres entiers naturels** forment un ensemble, généralement noté IN, qui est représenté par {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; … ; n ; …}.

Les **nombres entiers relatifs** forment un ensemble, généralement noté $\mathbb{Z}$, qui est représenté par {… ;-n ;…-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ;… ; n ;…}.

Les **nombres rationnels**, généralement représentés par la lettre majuscule **Q**, forment l'ensemble des nombres exprimés sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers, avec q différent de 0. Cet ensemble contient tous les nombres entiers et toutes les fractions.

Les **nombres irrationnels** forment un ensemble, généralement noté $\overline{Q}$, qui est constitué des nombres qui ne peuvent pas être exprimés sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers ; par exemple : $\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $5-\sqrt{7}$; π ; etc.

L'ensemble de **nombres réels**, noté IR, est l'ensemble composé des nombres rationnels et des nombres irrationnels. On écrit IR = **Q** $\cup$ $\overline{Q}$

Il y a quelques autres types de nombres que vous verrez plus tard.

Les nombres et leurs propriétés

Il est important de rappeler que tout nombre entier naturel est un nombre réel ; il en de même pour les entiers relatifs et les rationnels. Mieux on a la chaîne d'inclusion :
IN $\subset$ **Z** $\subset$ ID $\subset$ **Q** $\subset$ IR. Comme nous allons travailler avec des nombres réels, il est nécessaire de connaître quelques unes de leurs propriétés et certaines règles de calcul applicables en algèbre.

Propriétés fondamentales de l'addition des nombres réels.

A. **Elément neutre 0** :
Pour tout nombre réel x, $x + 0 = 0 + x = x$.
Exemple : $234 + 0 = 0 + 234 = 234$.

B. **Stabilité** :
La somme de deux nombres réels est un nombre réel.
La différence de deux nombres réels est un nombre réel.
Si x et y sont des nombres réels, alors $x + y = z$ et $x - y = z'$ sont des nombres réels.

C. **Associativité** :
Si a, b et c sont des nombres réels quelconques alors :
$a + (b + c) = (a + b) + c$.
Exemple : $25 + (300 + 75) = (25 + 300) + 75$
$25 + 375 = 325 + 75$
$400 = 400$.

D. **Commutativité** :
Si a et b sont des nombres réels quelconques, alors :
$a + b = b + a$.
Exemple : $125 + 375 = 375 + 125$
$500 = 500$.

Propriétés fondamentales de la multiplication des nombres réels.

A. **Elément neutre 1** :
Pour tout nombre réel a , $a \times 1 = a$;
Exemple : $525 \times 1 = 525$.

B. **Stabilité**
Si a et b sont des nombres réels quelconques, alors $a \times b = c$ est un nombre réel.
Exemple : $100 \times 750 = 75\,000$ est un nombre réel.

Les nombres et leurs propriétés

C. **Associativité** :

Si a, b et c sont des nombres réels quelconques, alors $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

Exemple : $10 \times (5 \times 25) = (10 \times 5) \times 25$

$10 \times 125 = 50 \times 25$

$1\,250 = 1\,250$

D. **Commutativité** :

Si a et b sont des nombres réels quelconques, alors

$a \times b = b \times a$

Exemple : $100 \times 30 = 30 \times 100$

$3\,000 = 3\,000$

E. **Distributivité** :

Si a, b, et c sont des nombres réels quelconques, alors

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Exemple : $10 \times (40 + 60) = (10 \times 40) + (10 \times 60)$

$10 \times 100 = 400 + 600$

$1\,000 = 1\,000$

L'ordre des opérations sur les nombres réels :

S'il y a plusieurs calculs à effectuer avec des nombres réels, il est conseillé de respecter un ordre dans l'exécution des opérations pour éviter de se tromper. En général, tu dois commencer avec les opérations à l'intérieur des parenthèses, pour ensuite aller aux étapes suivantes : puissance, multiplication, division, addition et soustraction.

Exemple : $(3^2 \times 2 - \frac{12}{4} + (2^3 \times 10 + 2))$

$= (3^2 \times 2 - \frac{12}{4} + (8 \times 10 + 2))$

$= (3^2 \times 2 - \frac{12}{4} + (80 + 2))$

$= (3^2 \times 2 - \frac{12}{4} + 82)$

$= (9 \times 2 - \frac{12}{4} + 82)$

$= (18 - 3 + 82)$

$= (100 - 3)$

$= 97$

Les nombres et leurs propriétés

Multiplier et diviser par zéro :

Pour tout nombre réel a, $a \times 0 = 0$.
Pour tout nombre réel a, $a : 0$ est indéfini.
NB : Il est impossible de diviser un nombre par zéro.

Nombres et fractions :

Un nombre rationnel est un nombre qui peut être exprimé sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q étant des nombres entiers. p représente le numérateur et q est appelé le dénominateur.
Tout nombre rationnel peut se mettre sous la forme d'une fraction.

Exemple	Types
$\frac{-6}{10}$	Le numérateur est inférieur au dénominateur
$\frac{7}{25}$	Le numérateur est inférieur au dénominateur
$\frac{15}{4}$	Le numérateur est supérieur au dénominateur
Pour tout nombre entier n, $n = \frac{n}{1}$	Car 1 élément neutre de la multiplication
Pour tout nombre entier non nul a, $\frac{a}{a} = 1$	Le numérateur est égal au dénominateur
$9\ \frac{3}{4}$	9 et $\frac{3}{4}$ est un nombre composé d'un entier et d'une fraction (c'est 9 + 0,75)
$A = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{5}}$	Le numérateur et le dénominateur sont des fractions

Les nombres et leurs propriétés

Opérations avec les fractions :

Fractions inverses : Si $\frac{a}{b}$ est une fraction non nulle alors $\frac{b}{a}$ est son inverse.

Exemple : $\frac{9}{25}$ est l'inverse de $\frac{25}{9}$ et réciproquement.

Fractions équivalentes : Si $\frac{a}{b}$ est une fraction avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc}.$$

Exemples : $$\frac{3}{4} \times \frac{10}{10} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{13}{13} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

Multiplication des fractions :

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des fractions avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (numérateur multiplié par numérateur et dénominateur multiplié par dénominateur).

Exemples : $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$; $\frac{3}{7} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{70}$; $\frac{7}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{48}$

Addition des fractions :

Pour additionner deux fractions ayant le même dénominateur on fait la somme des numérateurs et on conserve le dénominateur.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

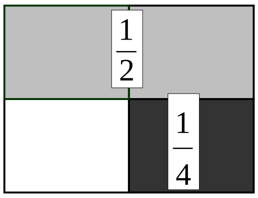
Exemples : $$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$$

Les nombres et leurs propriétés

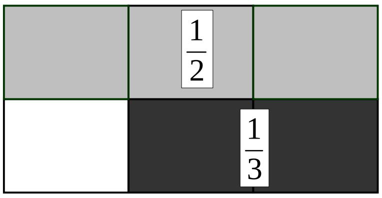
Si les dénominateurs sont différents, on réduit les fractions au même dénominateur avant de les additionner.

Exemples :



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1\times 2}{2\times 2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

<u>Inverse des fractions et division de deux fractions</u> :

L'inverse d'une fraction est trouvé simplement en renversant la fraction (en d'autres termes, le dénominateur et le numérateur sont intervertis).
Par exemple, l'inverse de $\frac{5}{3}$ est $\frac{3}{5}$.
Pour diviser deux fractions, on multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{1}=\frac{8}{3}$$

<u>Résumé des propriétés de l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des fractions</u> :

Multiplication : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Addition lorsque les fractions ont le même dénominateur : $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

Addition lorsque les dénominateurs sont différents : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

De même pour la soustraction on a : $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$; $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$

Les nombres et leurs propriétés

Division : $$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Notons que pour les fractions considérées dans cette division les nombres b, c et d sont différents de zéro.

<u>Fractions décimales</u> :

Il est parfois difficile de comparer deux fractions qui ont des dénominateurs différents. Par exemple, à première vue, on ne peut pas déterminer facilement laquelle des fractions $\frac{9}{16}$ et $\frac{25}{44}$ est la plus grande. Ainsi, nous devons les réduire au même dénominateur. Il est aussi facile de retenir le plus petit dénominateur commun aux deux fractions. On peut aussi les simplifier pour rendre la comparaison plus facile.

Par exemple : Pour comparer $\frac{9}{16}$ et $\frac{25}{44}$ on a :

$\frac{9}{16} = \frac{99}{176}$ et $\frac{25}{44} = \frac{275}{176}$, donc $\frac{25}{44}$ est plus grand que $\frac{9}{16}$.

Pour certaines fractions inférieures à 1, il est possible de les écrire sous la forme d'un nombre décimal avec un 0 placé avant la virgule.
Exemples:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Si une unité des dixièmes seulement est écrite après la virgule, alors le nombre peut s'écrire sous la forme d'une fraction ayant pour dénominateur 10.

$$0{,}1 = \frac{1}{10} \qquad 0{,}2 = \frac{2}{10} \qquad 0{,}3 = \frac{3}{10}$$
$$0{,}4 = \frac{4}{10} \qquad 0{,}5 = \frac{5}{10} \qquad 0{,}9 = \frac{9}{10}$$

Si deux unités seulement sont écrites après la virgule, alors le nombre peut s'écrire sous la forme d'une fraction ayant pour dénominateur 100.

$$0{,}15 = \frac{15}{100} \qquad 0{,}33 = \frac{33}{100} \qquad 0{,}75 = \frac{75}{100}$$

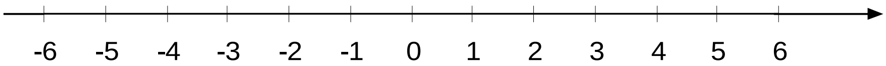
Si trois unités seulement sont écrites après la virgule, alors le nombre peut s'écrire sous la forme d'une fraction ayant pour dénominateur 100.

$$0{,}349 = \frac{349}{100}$$

Les nombres et leurs propriétés

Activité

1. Place les nombres suivants sur l'axe gradué 5 ; -3 ; $\frac{9}{2}$; -1,5 ; $-\frac{17}{4}$; $\frac{8}{3}$.



2. Quel est le nombre A égal à $\frac{9}{2} + \frac{8}{3}$?

3. Quel est le nombre B égal à $\frac{9}{2} - \frac{8}{3}$?

4. Quel est le nombre C égal à $\frac{9}{2}$ - 1.5 ?

5. Quel est le nombre D égal à $\frac{5}{\frac{8}{3}}$?

6. Quel est le nombre E égal à $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{25}{8}}$?

7. Quel est l'opposé de (-3) ?

8. Quel est l'inverse de $\frac{8}{3}$?

9. Calcule $[(-\frac{17}{4}) + \frac{9}{2} + \frac{8}{3}]$.

10. Ecris quatre fractions égales à 25.

Thème I : Les fondements de l'algèbre :
Les nombres, les équations et les graphiques

Leçon 2 : Équations

Le sais-tu ?

Une équation est une égalité entre deux expressions faisant intervenir des lettres et des nombres.

Voici quelques exemples d'équations et leur solution :

Équation	Solution
$10y - 20 = 0$	$y = 2$
$6y + 4 = 8y - 10$	$y = 7$
$130y + 6y - 20 = 68y + 184$	$y = 3$
$46y + 38y + 10 = 54y + 10$	$y = 0$

Equation	Solution
$3x - 6 = 12$	$x = 6$
$3x - 12 = 12$	$x = 8$
$4x - 4 = 12$	$x = 4$
$4x - 20 = 12$	$x = 8$
$5x - 18 = 12$	$x = 6$

Exemple d'équations n'admettant pas de solution

$2x + 3 = 5 + 2x$	Aucun nombre réel ne vérifie ces équations.
$3(1 - 2x) = 2(x + 1) - 8x$	

Exemple d'équations admettant une infinité de solutions

$2x + 3 = (1 + 2x) + 2$	Tout nombre réel vérifie ces équations. Donc tout nombre réel est solution de ces équations
$3(1 - 2x) = 2(x + \frac{3}{2}) - 8x$	

Équations

Equations :

Lorsqu'une égalité contient un nombre inconnu, il est souvent possible de trouver la valeur de cette inconnue pour qu'elle soit vraie. Ceci peut être fait en utilisant la règle mathématique avec les équations (c'est-à-dire exécuter l'opération en transposant les éléments) jusqu'à ce que l'inconnue soit isolée d'un côté du signe égal (=) de l'équation. Cependant, pour certaines équations, il est parfois difficile de les résoudre suivant cette méthode.

Lorsqu'une équation contient deux ou plusieurs inconnues, il est possible de trouver plusieurs solutions. Dans ce cas la solution peut contenir un ensemble de valeurs qui peuvent représenter les inconnues de cette équation. Par exemple, si les deux inconnues sont x et y, alors la solution de cette équation doit avoir deux valeurs numériques : Une pour x et une pour y. (Si le nombre des équations est le même que celui des inconnues, alors il est possible de trouver une seule solution qui peut rendre toutes les équations vraies simultanément).

- Certaines équations particulières sont vraies pour toutes les valeurs possibles des inconnues qu'elles contiennent. Ces types d'équations sont dites identiques. En voici quelques exemples.

$$4x = x + x + x + x$$
$$3(a + b) = 3a + 3b$$
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

- Une équation de la forme $ax + b = 0$, où x représente le nombre inconnu avec a et b des nombres connus, est appelée une équation linéaire. La justification de ce nom se fera plus tard, quand nous trouverons qu'une équation linéaire peut être représentée comme une ligne droite sur un graphique.

Équations

Règles fondamentales pour les équations :

Tout ce que tu fais d'un côté d'une équation (addition, soustraction, multiplication ou division), si tu fais la même chose de l'autre côté de l'équation, alors l'équation restera vraie (en supposant que l'équation était vraie au départ). En particulier, tu peux :

- Additionner un même nombre aux deux membres de l'équation;
- Soustraire le même nombre aux deux membres de l'équation ;
- Multiplier par un même nombre les deux membres de l'équation;
- Diviser par un même nombre non nul les deux membres de l'équation.

Cependant, tu ne peux pas diviser les deux membres de l'équation par zéro, dans la mesure où on ne peut pas diviser un nombre par zéro.
Bien que ce soit permis, multiplier les deux côtés d'une équation par zéro ne te mène nulle part, c'est toujours égal à zéro.

Si tu commences avec une égalité fausse et que tu multiplies ou divises par le même nombre les deux membres de cette égalité, alors l'égalité restera toujours fausse. Ce sera la même chose en additionnant ou en soustrayant le même nombre aux deux membres de l'équation.

La Règle de multiplication suggérée avec les équations :

Quand il n'y a aucun signe d'opération entre deux lettres ou une lettre et un nombre alors il est suggéré de faire une multiplication.

Exemple: $10x + 5x - 35 = x + 7$

En utilisant la règle de multiplication suggérée, l'équation deviendra :

$$10 \times x + 5 \times x - 35 = x + 7$$

En transposant les x d'un côté et les nombres de l'autre, nous aurons :

$$10x + 5x - x = 7 + 35$$

En simplifiant, nous aurons :

$$14x = 42$$

La solution finale : $x = \frac{42}{14}$; $x = 3$

Équations

Exercices corrigés sur les équations :

Trouve la valeur de x au niveau des équations suivantes :

1.	$x + 32 = 74$;	x =
2.	$x - 12 = 32$;	x =
3.	$8x = 48$;	x =
4.	$\frac{x}{3} = 15$;	x =
5.	$2x + 3 = 21$;	x =
6.	$4x - 10 = 54$;	x =
7.	$12x - 8 = 3x + 64$;	x =
8.	$100 - 4x = 20 + 6x$;	x =

Réponses :

1. $x + 32 = 74$; $x = 74 - 32 = 42$

Vérification : $42 + 32 = 74$

2. $x - 12 = 32$; $x = 32 + 12 = 44$

Vérification : $44 - 12 = 32$

3. $8x = 48$; $x = \frac{48}{8} = 6$

Vérification : $8 \times 6 = 48$

4. $\frac{x}{3} = 15$; $x = 3 \times 15 = 45$

Vérification : $\frac{45}{3} = 15$

5. $2x + 3 = 21$; $2x = 21 - 3$; $x = \frac{18}{2} = 9$

Vérification : $2 \times 9 + 3 = 21$

6. $4x - 10 = 54$; $4x = 54 + 10$; $x = \frac{64}{4} = 16$

Vérification : $4 \times 16 - 10 = 54$

7. $12x - 8 = 3x + 64$; $12x - 3x = 64 + 8$; $9x = 72$; $x = \frac{72}{9}$; $x = 8$

Vérification : $12 \times 8 - 8 = 3 \times 8 + 64$; $88 = 88$

8. $100 - 4x = 20 + 6x$; $100 - 20 = 6x + 4x$; $80 = 10x$; $x = \frac{80}{10}$; $x = 8$

Vérification : $100 - 4 \times 8 = 20 + 6 \times 8$; $68 = 68$

Équations

1. Trouve la valeur de x dans les équations suivantes.

a.	$3x + 16 = 22$	j.	$10 + 5x = 110$
b.	$14 – x = 10$	k.	$10 + 5x = 100 – 4x$
c.	$34 – 10x = 6x + 2$	l.	$12 + ax = 16$
d.	$7x + 5 = 75$	m.	$bx = h$
e.	$3x – 8 = 16$	n.	$b + ax = 12$
f.	$6 – 7x + 20 = 5$	o.	$b + ax = c$
g.	$9 – x = 1$	p.	$ax = bx + c$
h.	$x + 2x + 3x + 4x + 5x = 45$	q.	$ax – c = d$
i.	$100 – 4x = 60$	r.	$ax – b = cx + d$

2. Si tu conduis avec une vitesse de 70 km/h, quelle est la durée pour parcourir une distance de 3.010 km ?

3. Deux personnes quittent deux villes distantes de 100 km et se dirigent l'un vers l'autre. Si la vitesse de l'une des personnes est de 30 km/h et celle de l'autre 20 km/h, pendant combien de temps doivent-ils conduire pour pouvoir se rencontrer ?

4. Réponds à la même question que dans l'exercice 4, mais cette fois-ci, suppose que la 1ère personne roule à une vitesse de v_1 km/h et la 2ème à v_2 km/h.

5. Suppose que tu essaies de gagner 48.000 F. Tu as le choix entre un travail dur qui paie 12.000 F la journée, un travail facile qui paie 6.000 F la journée, et un travail où tu peux travailler à temps partiel dans les deux emplois précédents. Énumère quelques façons possibles de gagner les 48.000 F par ces différentes combinaisons.

6. Si une cassette coûte 1200 F, un sandwich 600 F, et tu disposes de 6000 F à dépenser pour ces deux produits, énumère les nombres de cassettes et de sandwichs que tu peux acheter.

7. Un fermier possède des coqs et des chevaux. Les animaux ont un total de 88 pieds et 40 ailes. Combien de chevaux et de coqs sont dans la ferme ?

8. Si la Mairie de Dakar projette de planter au total 18 arbres aux bords de deux rues, et décide de mettre deux fois plus d'arbres à la Rue Blaise Diagne qu'à la rue Malick Sy, combien d'arbres seront plantés au bord de chaque rue ?

9. Si le Chapitre 1 d'un livre contient cinq fois plus de pages que contient le Chapitre 2, et s'il y a 65 pages au total dans les deux chapitres, combien de pages contient chaque chapitre ?

10. Quels sont les deux nombres consécutifs dont la somme est égale à 63 ?

11. Quels sont les trois nombres consécutifs dont la somme est égale à 75 ?

Équations

12. Thierno tape à la machine deux fois plus vite que Jacky. Pour taper ensemble un manuscrit de 600 pages, ils ont mis le même temps. Combien de pages ils ont tapées chacun ?

13. Tu as une clôture de 90 m de long, tu l'utilises pour clôturer exactement un terrain rectangulaire dont la longueur est deux fois plus grande que la largeur. Quelles sont les dimensions du terrain clôturé?

Équations et inéquations

Les postulats d'égalité :

- N'importe quel nombre est égal à lui-même.
  Avec les symboles, on écrit : si a est un nombre quelconque, alors : $a = a$.
  En langage mathématique, on dit que l'égalité est réflexive.

- Tu peux permuter les deux côtés d'une équation lorsque le besoin se fait sentir.
  Avec les symboles on écrit : si a et b sont des nombres quelconques, $a = b$ veut dire que $b = a$.
  En langage mathématique, on dit que l'égalité est symétrique.

- Si deux nombres sont chacun égal à un troisième nombre, alors ils sont égaux.
  Avec les symboles on écrit : a, b, et c étant des nombres quelconques , si $a = c$ et $b = c$, alors $a = b$.
  En langage mathématique, on dit que l'égalité est transitive.

- Importante règle avec les équations : Tout ce que tu fais sur un membre d'une équation, fais exactement la même chose sur l'autre membre et l'équation reste la même.
  Par exemple : a, b et c étant des nombres, si $a = b$, alors

  $$a + c = b + c$$
  $$a - c = b - c$$
  $$a \times c = b \times c$$
  $$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

  (Dans la dernière équation c doit être différente de zéro).

- La propriété de la substitution : si $a = b$, alors tu peux remplacer b par a partout où tu vois b dans l'expression.

Équations et inéquations

Activité 2

Sais-tu comment faire ?	**As – tu compris ?**
Nomme trois solutions de chaque inégalité et fais un graphique représentant les solutions dans les cas ci-dessous. 1) m < 10 2) z > 4 3) k > 14 4) p < 5	A. Dis comment un nombre peut être une solution d'une inégalité. B. Explique comment le nombre 7 est-il une solution de l'équation de la droite dans l'exercice N°2.
Convertir un problème en une équation. Écris une équation pour chaque donnée. 5) 5 plus s égale 14. 6) 16 moins t égale 13. 7) k fois 8 égale 24.	C. Dis comment traduire l'exercice N°7 en une équation. D. Explique l'opération à utiliser pour l'exercice N°6.
Equations et graphiques Fais un graphique pour chaque équation avec les coordonnées suivantes. 8) y = x + 3 9) 7 = 3x Utilise l'équation y = 5x + 3 pour trouver la valeur de y pour chaque valeur de x donnée. 10) x = 2 11) x = 9	E. Quel graphique dois-tu utiliser pour l'exercice N°8 ? F. Nomme 5 couples pour le graphique de l'équation dans l'exercice N°9.

Thème I : Les fondements de l'algèbre : Les nombres, les équations et les graphiques

Leçon 3 : Puissances et racines carrées

Le sais-tu ?

La notation puissance est parfois utilisée pour la multiplication.

$3 \times 3 = 3^2$ et $(-2y) \times (-2y) \times (-2y) = (-2y)^3$.

Dans la notation a^n, a est la base et l'entier naturel n est l'exposant. L'expression explicite est :
" a exposant n " ou simplement " a puissance n "

a^2 représente « a au carré » ; a^3 représente « a au cube » ; $(-a)^n$ n'est pas toujours la même chose que $–(a^n)$.

Exemple : $(-4)^2 = 16$, alors que $–(4^2) = -16$.
$(-2)^3 = - 8$ et $- (2^3) = - 8$

a^n signifie que « a est multiplié par lui-même n fois avec n entier positif ».
Par exemple :

$11^2 = 11 \text{ x } 11 = 121$
$10^3 = 10 \text{ x } 10 \text{ x } 10 = 1\,000$
$6^1 = 6$

$5^4 = 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 = 625$
$2^{10} = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 1\,024$
$6^0 = 1$;
$a^0 = 1$ quel que soit a différent de zéro.

Tableau récapitulatif avec les exposants :

x	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
0	Indéfini	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	16	32	64	128
3	1	3	9	27	81	243	729	2 187
4	1	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384
5	1	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125
6	1	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936
7	1	7	49	343	3 401	16 807	117 649	823 543
8	1	8	64	512	4 096	32 768	262 144	2 097 152
9	1	9	81	729	6 561	59 049	531 441	4 782 969
10	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000

Puissances et racines carrées

Règles de calculs

1) $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

Exemple : $\dfrac{5^7}{5^3} = \dfrac{5\times5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5\times5}$

Simplifie par 5^3 (divise le numérateur et le dénominateur par 5^3):

$$= 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5$$
$$= 5^4$$

2) $(x^a)^b = (x)^{ab}$.

Exemple :

$$(3^2)^4 = (3^2) \text{ x } (3^2) \text{ x } (3^2) \text{ x } (3^2)$$
$$= 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3$$
$$= 3^8$$

3) $(xy)^a = x^a y^a$.

Exemple :

$$(5 \text{ x } 3)^2 = (5 \text{ x } 3) \text{ x } (5 \text{ x } 3)$$
$$= (5 \text{ x } 5) \text{ x } (3 \text{ x } 3)$$
$$= 5^2 \text{ x } 3^2$$
$$= 225$$

Nous avons passé en revue les règles mathématiques avec les exposants.
À la page suivante, un récapitulatif fera le point sur les règles applicables avec les exposants.

Puissances et racines carrées

Règles applicables :

- Produit avec les puissances : $a^m a^n = a^{m+n}$

Si nous avons la même base, pour multiplier, il faut additionner les exposants.
Ex : $2^3 \times 2^8 = 2^{11}$.

- Division avec les puissances : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Si nous avons la même base au numérateur comme au dénominateur, pour diviser, il faut soustraire les exposants.

Ex : $\frac{7^5}{7^3} = 7^2$.

- Puissance de puissance : $(a^m)^n = a^{mn}$

Pour calculer une puissance d'une puissance d'un nombre, il faut multiplier les exposants.
Ex : $(4^2)^3 = 4^{2 \times 3} = 4^6$.

- Puissance d'un produit : $(ab)^n = a^n b^n$
- Puissance d'un quotient : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

NB. La puissance se ''distribue'' dans la multiplication et la division, mais pas pour l'addition et la soustraction.
$(xy)^2 = x^2y^2$, mais $(x + y)^2 \neq x^2 + y^2$
Exemple : $(2 \times 5)^2 = (10)^2 = 100 = 4 \times 25$
mais $(2 + 5)^2 = (7)^2 = 49 \neq 4 + 25 = 29$

- Puissance zéro : $a^0 = 1$ avec $a \neq 0$

Pour être conforme avec toutes les autres règles des puissances et exposants, on pose $a^0 = 1$, sauf si $a = 0$. 0^0 est indéfini.

- Puissance négative : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; n entier naturel.

a^{-n} est l'inverse de a^n.

Toutes les règles précédemment étudiées s'appliquent aux puissances négatives.

Ex : $2^3 \times 2^{-3} = \frac{2^3}{2^3} = 1$.

Ainsi, $2^3 \times 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$.

Puissances et racines carrées

- Racine carrée : $\sqrt{a^2} = |\ a\ |$ Exemples : $\sqrt{5^2} = |\ 5\ | = 5$

$\sqrt{(-4)^2} = |\ -4\ | = 4$

Quelques règles de calcul
Pour la suite x et y sont positifs.

1- $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$

Exemples : Ex1 : $\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$

Ex 2 : $\sqrt{1,21 \times 1,44} = \sqrt{1,21} \times \sqrt{1,44} = 1,1 \times 1,2 = 1,32$

2- $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ avec $y \neq 0$

Exemples : Ex 1 : $\sqrt{\dfrac{49}{81}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \dfrac{7}{9}$ Ex 2 : $\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \dfrac{5}{3}$

3- $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Exemple : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

- Expressions conjuguées

Le conjugué de $a + \sqrt{b}$ est $a - \sqrt{b}$ avec b positif.

On remarque que $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

Exemples :

Le conjugué de $(2 + \sqrt{5})$ est $(2 - \sqrt{5})$

On a : $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 2^2 - 5$

$(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = -1$

Application : Rendre rationnel un dénominateur

Exemple : $\dfrac{7}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{7\left(2 - \sqrt{3}\right)}{\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)}$

… $= \dfrac{14 - 7\sqrt{3}}{2^2 - 3}$

…. $= 14 - 7\sqrt{3}$

Puissances et racines carrées

Activités

1-Simplifier les expressions suivantes. Exprimer le résultat à l'aide d'une puissance.

1. $\dfrac{3^5}{3^2}$
2. $\dfrac{2^{10}}{2^6}$
3. $\dfrac{5}{5^2}$
4. $\dfrac{(1{,}16)^2}{(1{,}16)^4}$
5. $\dfrac{(3{,}45)^3}{(3{,}45)^{-2}}$
6. $\dfrac{x^3}{y^{-3}}$
7. $\dfrac{3r^3}{4r^2}$
8. $\dfrac{10a^2b^3c}{abc}$
9. $\dfrac{16a^3b^4c}{8a^3b^6c^2}$
10. $\dfrac{r^2}{r}$
11. $\dfrac{1}{x^{-1}}$
12. b^{-3}
13. $b^{-2}c^2$
14. $\dfrac{1}{x^{-1}+x^{-2}}$
15. $3^7 \times 3^{-5}$
16. $(-4)^3$
17. $(2\times 3)^3$
18. $\dfrac{4^{12}}{4^7}$
19. $\dfrac{8\times 3}{8^3}$
20. $\left(xy^2\right)^3$
21. $\left[\dfrac{\left(a^2b\right)}{\left(ab^3\right)}\right]^3$
22. $\dfrac{\left(5^3\times 5^{-2}\right)}{5^4}$
23. $\left[\dfrac{\left(5ab^{-2}\right)}{\left(7a^{-2}b\right)}\right]^2$
24. $\dfrac{\left(2x^2y^3z^{-2}\right)}{\left(x^5y^{-1}z^4\right)}$

2- Simplifier les racines carrées suivantes si possible. Par exemple,
$\sqrt{18} = \sqrt{9x2} = \sqrt{9}\,.\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

1. $\sqrt{12}$
2. $\sqrt{100}$
3. $\sqrt{9/16}$
4. $\sqrt{8}$
5. $\sqrt{72}$
6. $\sqrt{32}$
7. $\sqrt{44}$
8. $\sqrt{a^4x^2}$
9. $\sqrt{4x^6}$
10. $\sqrt{12y^2}$
11. $\sqrt{4a^2}$
12. $\sqrt{9x}$
13. $\sqrt{48x}$
14. $\sqrt{18x}$
15. $\sqrt{24a^2x}$

Puissances et racines carrées

3- Simplifier les fractions en mettant le dénominateur sous forme de nombre rationnel.

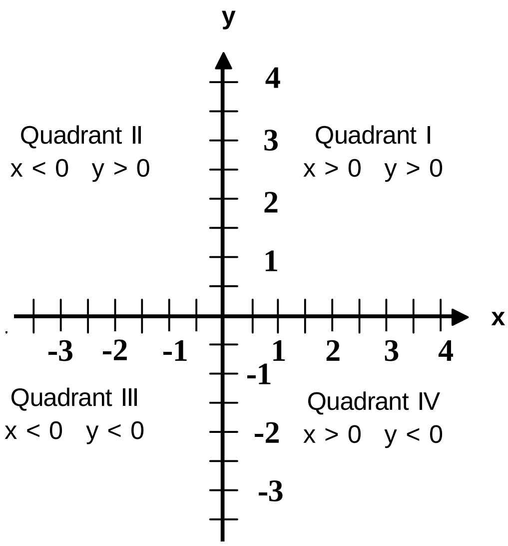
28.	$^{1}\sqrt{5}$	32.	$\dfrac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$
29.	$\dfrac{1}{\sqrt{5} + 4}$	33.	$\dfrac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{2}}$
30.	$\dfrac{10}{\sqrt{5}}$	34.	$\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{8}}$
31.	$\dfrac{5}{\sqrt{6} + 9}$	35.	$\dfrac{5}{\sqrt{6} + \sqrt{54}}$

Thème I : Les fondements de l'algèbre : Les nombres, les équations et les graphiques

Leçon 4 : Les représentations graphiques dans un plan cartésien

Le sais-tu ?

Une surface plate qui s'étend à l'infini est appelée un plan. Un plan peut être représenté par une feuille de papier.
En partageant la feuille de papier par deux droites perpendiculaires orientées, on définit deux axes qu'on peut désigner par l'axe des x et par l'axe de y.
L'axe des x et l'axe des y divisent le plan en quatre parties appelées quadrants. Le quadrant où x et y sont positifs ($x > 0$, $y > 0$) est désigné par quadrant I. Les autres quadrants sont indiqués ci-dessous.

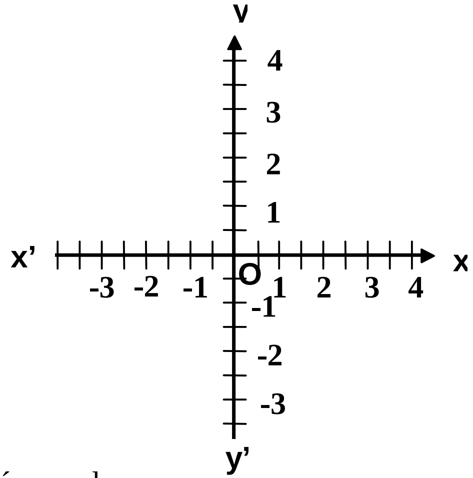


Lorsque les axes sont perpendiculaires et ont la même unité de longueur, on dit que le repère est orthonormal ou orthonormé.
Le couple (x, y) représente les coordonnées cartésiennes[1]. Le point A de coordonnées (x, y) sera noté : A (x, y) ou A $(x\,;\,y)$

[1] Le plan cartésien porte le nom du philosophe et mathématicien Descartes.

Les représentations graphiques dans un plan cartésien

Vocabulaire relatif au plan cartésien :



L'axe des x (ou l'axe des abscisses (x'x)) : en général, il est situé sur l'axe horizontal du plan. Les abscisses positives sont situées à droite du point origine O(0, 0) et à gauche de ce point origine, nous avons les abscisses négatives.
L'axe des y (ou l'axe (y'y) des ordonnées): Il est situé (en général) sur l'axe vertical du plan. Les ordonnées positives sont situées au dessus du point origine O(0, 0) et en dessous de ce point origine, nous avons les ordonnées négatives.
Origine : O (0,0) est le point d'intersection des axes (x 'x) et (y'y)

Quadrants : Ce sont les quatre (4) parties du plan délimitées par les axes.
Par convention, les quadrants sont numérotés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre en commençant par le côté supérieur à droite.

Point : Un point du plan est repéré par ses coordonnées.
La première coordonnée est l'abscisse; la seconde est l'ordonnée.
Exemple : Le point A (1, 2) représente une (1) unité à droite sur l'axe des abscisses et deux (2) unités sur l'axe des ordonnées en haut du point origine

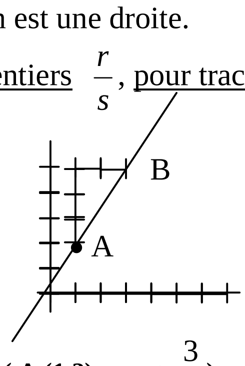
Droites dans un plan cartésien :

Une droite est identifiée soit par deux points, soit par un point et la pente.
NB. Une et une seule droite passe par deux points distincts.
Pente d'une droite : La pente (l'inclinaison) d'une droite dans un plan cartésien indique comment la ligne est inclinée. La pente est aussi appelée coefficient directeur.

Graphique d'une équation linéaire :

Une équation linéaire à deux inconnues x et y peut s'écrire, après simplification, sous la forme $ax + by = c$ ou sous la forme $y = mx + p$; a, b, c, m et p sont des réels constants.
Dans le cas où a et b ne sont pas tous nuls, le graphique de l'équation est une droite.

Utilisation de la pente exprimée sous forme de rapport de nombres entiers $\frac{r}{s}$, pour tracer une droite connaissant un de ses points :



(A (1,2) ; pente $\frac{3}{2}$)

- Place un point A de la droite ;
- De A, compte r unités parallèlement à l'axe des ordonnées dans le sens des y positifs si r est positif, dans le cas contraire si r est négatif puis place le point I ;
- De I, compte s unités parallèlement à l'axe des abscisses dans le sens des x positifs si s est positif, dans le sens contraire si s est négatif puis place le point B ;

La droite (AB) est la droite recherchée.

Les représentations graphiques dans un plan cartésien

<u>Trouver les intersections de la droite d'équation ax +by = c avec les axes :</u>
Pour trouver l'intersection avec l'axe (y' y) des ordonnées, considère que x = 0 et calcule y.
Pour trouver l'intersection avec l'axe (x' x) des abscisses, considère que y = 0 et calcule x.

<u>Forme y = mx + p</u>

m est la pente.
p est l'ordonnée à l'origine
Le point de coordonnées (0, p) appartient à la droite.

<u>Forme standard ax + by = c</u>

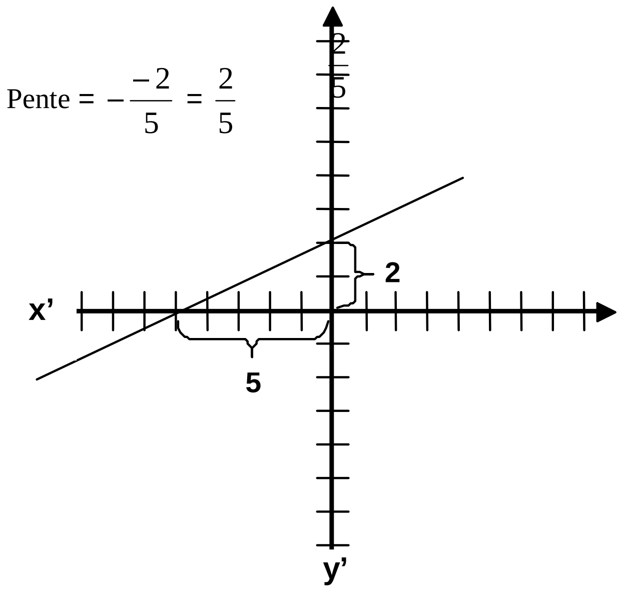
Pente : $-\frac{a}{b}$ si b $\neq 0$.

L'intersection avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées (0 ; $\frac{c}{b}$) avec b $\neq 0$.

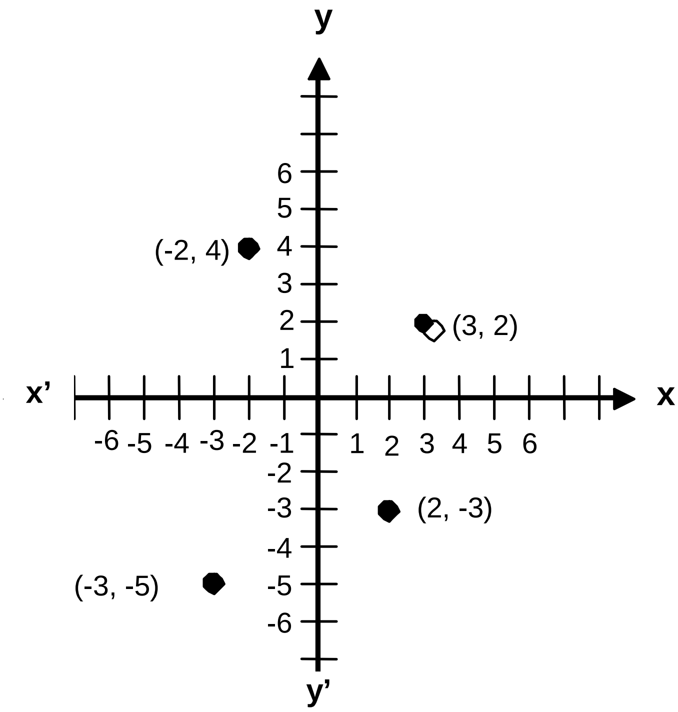
L'intersection avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées ($\frac{c}{a}$; 0) si a $\neq 0$.

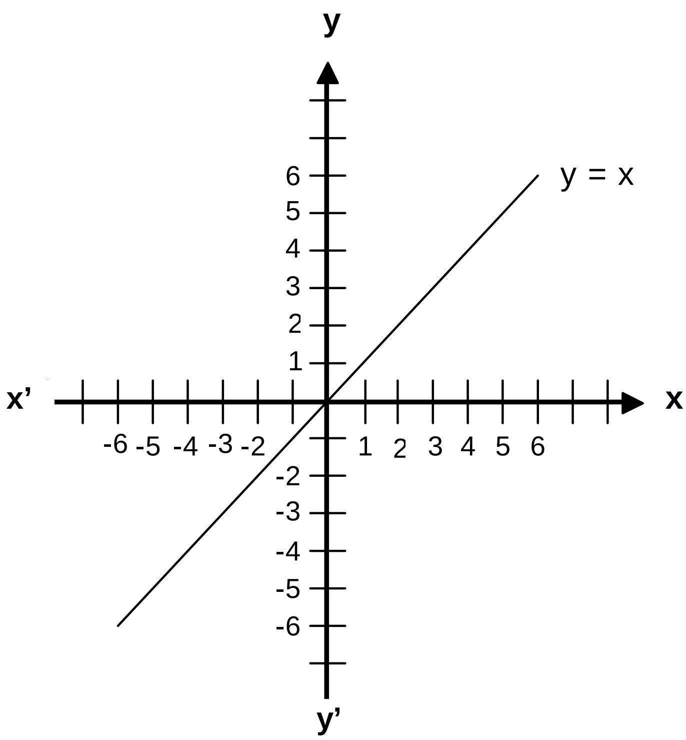
<u>D'une manière générale :</u>
Si les intersections ne sont pas évidentes, effectue les calculs pour déterminer le ou les points d'intersection. Place les points trouvés et relie ces points par une droite.

Par exemple : 5y – 2x = 10 ou y = $\frac{2}{5}x + 2$. Pente = $\frac{2}{5}$.

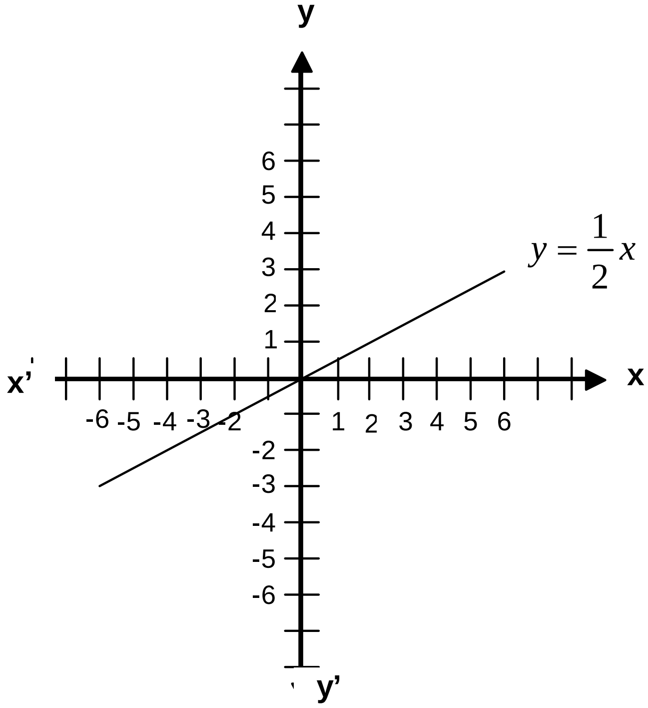


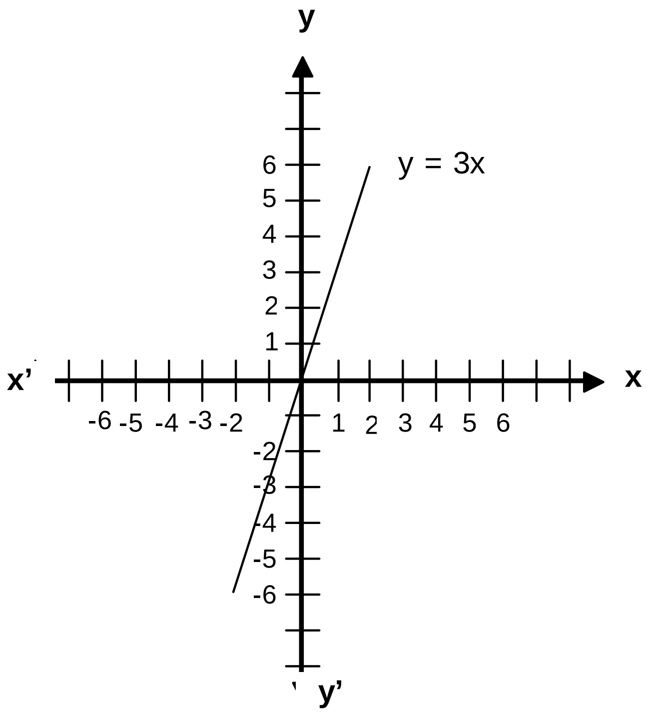
Les représentations graphiques dans un plan cartésien



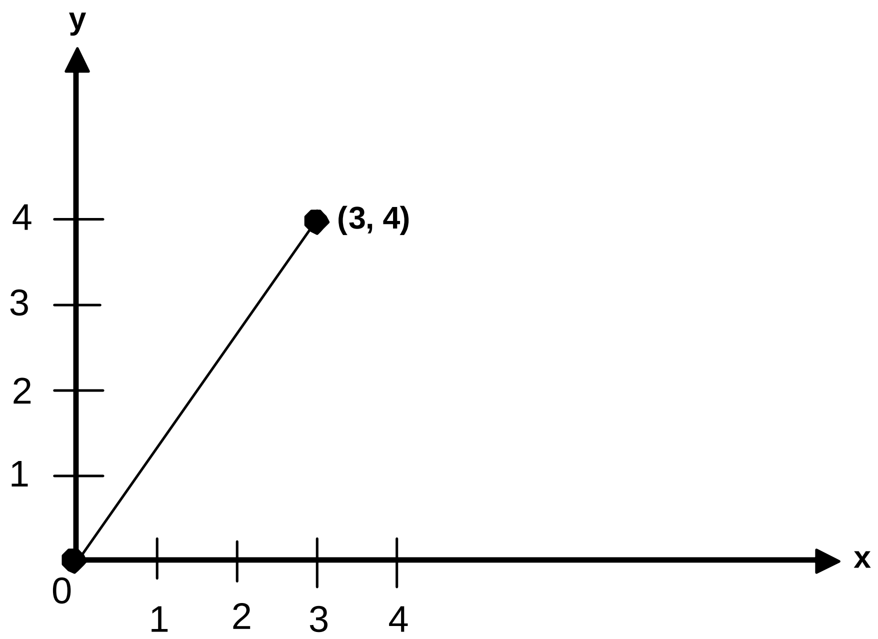


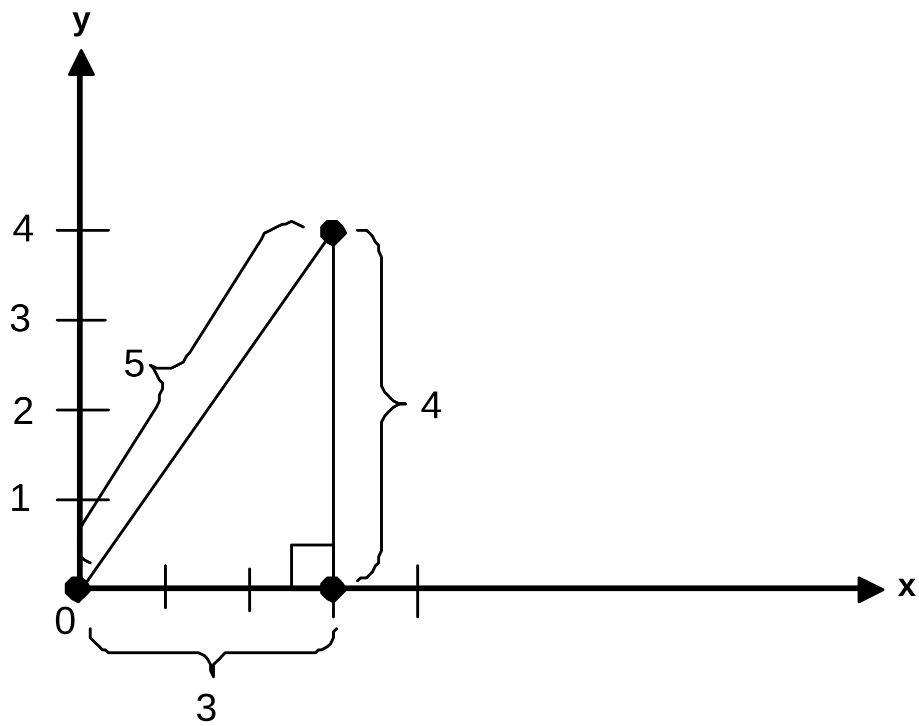
Les représentations graphiques dans un plan cartésien





Les représentations graphiques dans un plan cartésien





Les représentations graphiques dans un plan cartésien

Formule générale de la distance d'un point de coordonnées (x, y) à l'origine est :

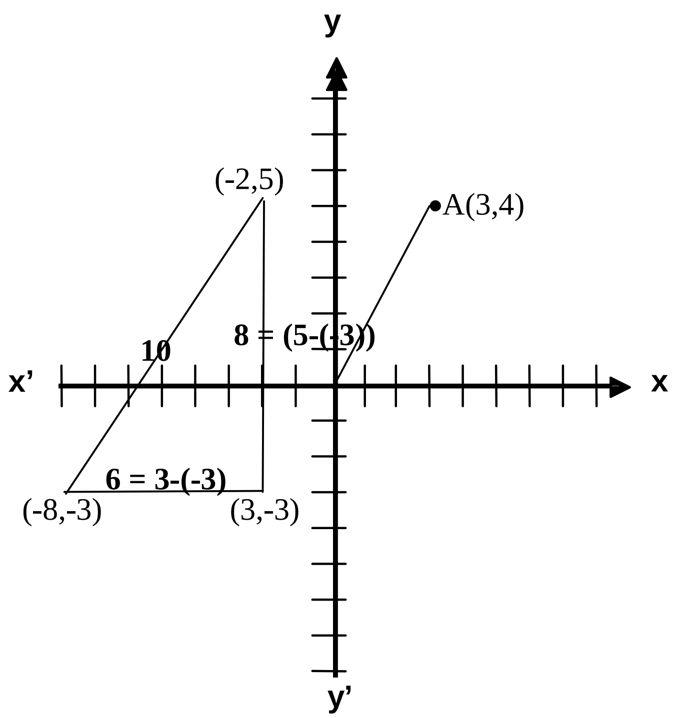
$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En général, la distance entre deux points de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Exemple :
La distance du point de coordonnées (3, 4) à l'origine est :

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



Les représentations graphiques dans un plan cartésien

Activités

1- Trouve la distance entre les points A et B suivants. Écris une équation de la droite joignant ces points.

a.	A (0, 0) et B (6, 8)	e.	A (9, 11) et B (8, 17)
b.	A (2, 3) et B (6, 10)	f.	A (16, 4) et B (0, -3)
c.	A (-1, 0) et B (1, 1)	g.	A (2, 4) et B (2, 12)
d.	A (-4, 6) et B (2, 10)	h.	A (3, 10) et B (10, 10)

2- Trouve les coordonnées des points où les droites suivantes coupent les axes (x'x) et l'axe des (y'y).

i.	$5y - 10x = 0$	l.	$100x - y = 1,000$
j.	$x + y = 1$	m.	$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 1$
k.	$2x + y = 10$	n.	$0,37x - 4,12y = 0,34$

3- Trouve les équations des droites qui passent par les points donnés avec les pentes indiquées.

o.	Pente : $\frac{1}{2}$;	point: A (6, 4)
p.	Pente : 0 ;	point: A (5, 10)
q.	Pente : m ;	point: A (1, 2)
r.	Pente : m ;	point: A (a, 5)
s.	Pente : 100 ;	point: A (1,025 ; 1,030)
t.	Pente : m ;	point: A (-5, -6)

Thème I : Les fondements de l'algèbre : Les nombres, les équations et les graphiques

Leçon 5 : Expression écrite d'une fonction

Le sais-tu ?

Expression écrite d'une fonction :

Une fonction est une règle de calcul qui associe un nombre à un autre nombre. Si la valeur de y (appelée la variable dépendante) dépend de la valeur de x (appelée la variable indépendante), alors nous pouvons écrire l'équation sous la forme suivante : y = f(x) qu'on peut lire y est égal à f de x. Dans cette expression, f représente la fonction. En remplaçant dans l'expression x par une valeur donnée, on peut calculer la valeur de y.

Parfois, tu as besoin de préciser la signification de la formule ; par exemple, $f(x) = 4x^2$ définit une fonction. Alors le résultat de la fonction dépend du nombre spécifique (ou de l'expression) utilisé(e) dans la fonction.

Par exemple, $f(3) = 4 \times 3^2 = 36$; $f(12) = 4 \times 12^2 = 576$,
$f(5a) = 4 \times 25a^2 = 100a^2$; $f(ab) = 4(ab)^2$.

Il y a une valeur unique de f (x) déterminée pour chaque valeur de x donnée. En d'autres termes, si x = 10, alors tu peux déterminer sans ambiguïté la valeur de f (10). Cependant, les valeurs différentes de x pourraient donner le même résultat pour f (x).
Par exemple, si $f(x) = x^2$, alors f (10) et f (-10) ont la même valeur : 100.
Dans le cas extrême où f (x) est égale à une valeur constante, f (x) = 17 par exemple, alors pour toutes les valeurs de x, le calcul de f (x) aboutit au même résultat.

Parfois deux fonctions sont composées pour que les images d'une fonction deviennent les données de l'autre fonction.
Par exemple, si $g(y) = \sqrt{y}$ et h(x) = 2x, alors nous pouvons créer la fonction $f(x) = g(h(x)) = \sqrt{2x}$.

Si y = f (x), et x = g (y) pour toutes les valeurs de x et y, alors g est la fonction réciproque de f. Il a l'effet d'inverser l'action de f et de revenir sur le nombre original. Si f et g sont composées, alors f (g (x)) = x.

Expression écrite d'une fonction

L'ensemble de toutes les valeurs possibles qui peuvent avoir des images par la fonction est appelé domaine de définition.
L'ensemble de toutes les images possibles est appelé ensemble image de la fonction.

Graphique d'une fonction :

La variable indépendante (appelée x, à moins qu'il y ait une autre appellation) est mesurée le long de l'axe horizontal, et la variable dépendante (appelée y) est mesurée le long de l'axe vertical. Pour une valeur particulière x_1, la fonction lui fait correspondre la valeur $y = f(x_1)$.
Evidemment le graphique ne peut pas montrer toutes les valeurs possibles de x, mais si le graphique montre des valeurs de x_q, nous pouvons alors lire la valeur de y_q correspondantes directement dans le graphique (bien que la lecture graphique soit en général moins précise que le calcul à partir d'une formule).

Fonction	Domaine de définition	Ensemble image
$f(x) = 3x$	Nombres réels	Nombres réels
$f(x) = 1/x$	Nombres réels (à l'exception de 0)	Nombres réels (à l'exception de0)
$f(x) = x^2$	Nombres réels	Nombres réels positifs
$f(x) = \sqrt{x}$	Nombres réels positifs ($x \geq 0$)	Nombres réels positifs
$f(x) = \lvert x \rvert$	Nombres réels	Nombres réels positifs
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$	L'intervalle [-1 ; 1]	L'intervalle [0 ; 1]

Equation d'une droite :

Une équation de la forme y = mx + b peut être représentée par une droite de pente (m), d'intersection avec l'axe des y le point (0 , b), et d'intersection avec l'axe des x le point $(\frac{-b}{m}, 0)$ lorsque $m \neq 0$.

Une équation de la forme ax + by = c peut être représentée par une droite avec une pente $(\frac{-a}{b})$, une intersection avec l'axe des y le point $(0, \frac{c}{b})$, et d'intersection avec l'axe des x le point $(\frac{c}{a}, 0)$ lorsque $a \neq 0$.

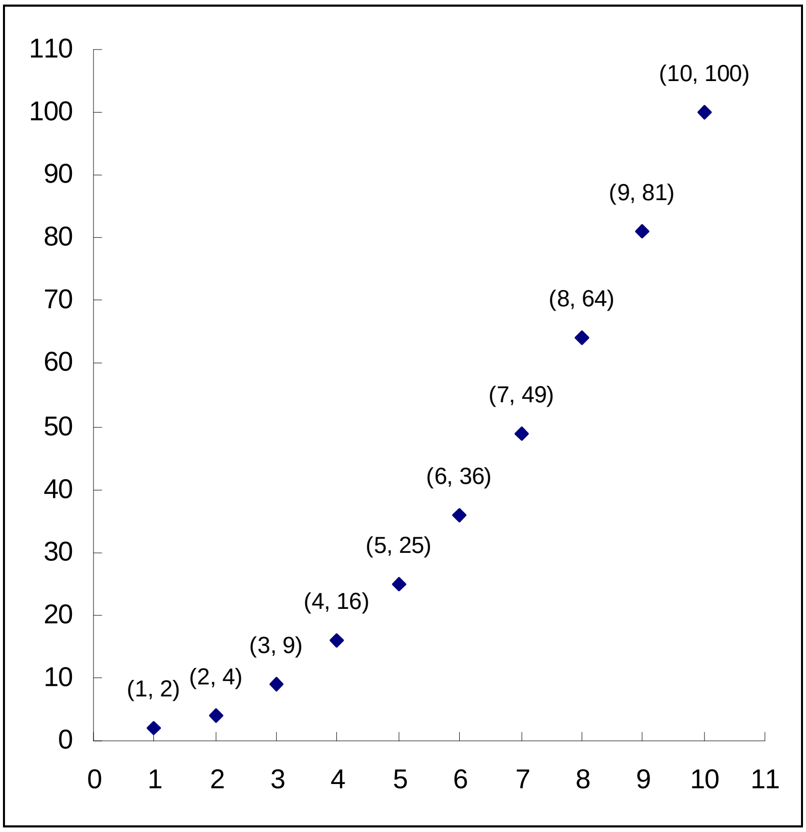
Une inégalité de la forme : $ax + by \leq c$ ou $ax + by \geq c$ peut être représentée comme une partie d'un graphique. Premièrement, trace la droite ax + by = c.
Tous les points d'un côté de la ligne vérifient l'inégalité et tous les points sur l'autre côté de la ligne ne vérifient pas l'inégalité.

Expression écrite d’une fonction

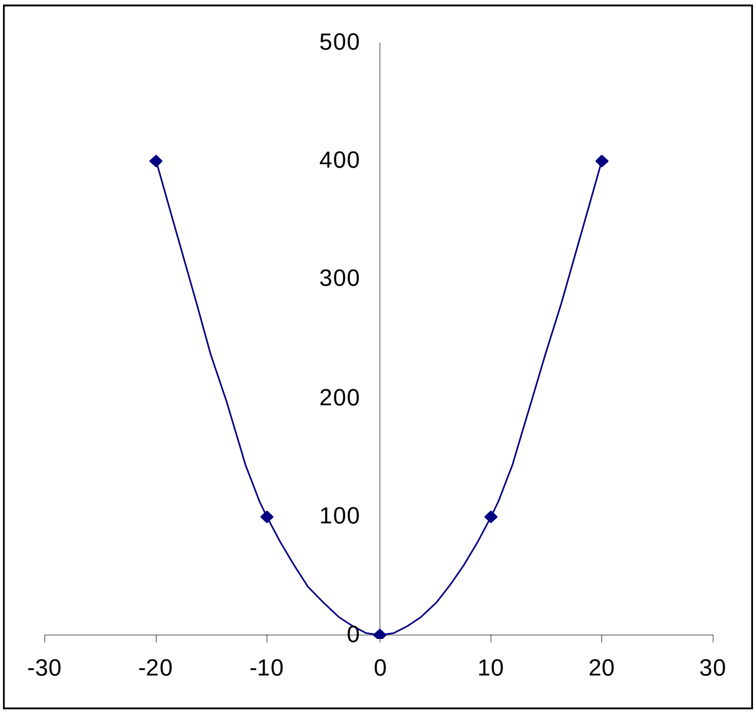
Nous avons traité encore des exemples de graphiques avec les fonctions. Si x représente le côté d'un carré, alors A = f (x) = x^2 représente l’aire. Nous avons créé une table de valeurs pour cette fonction.

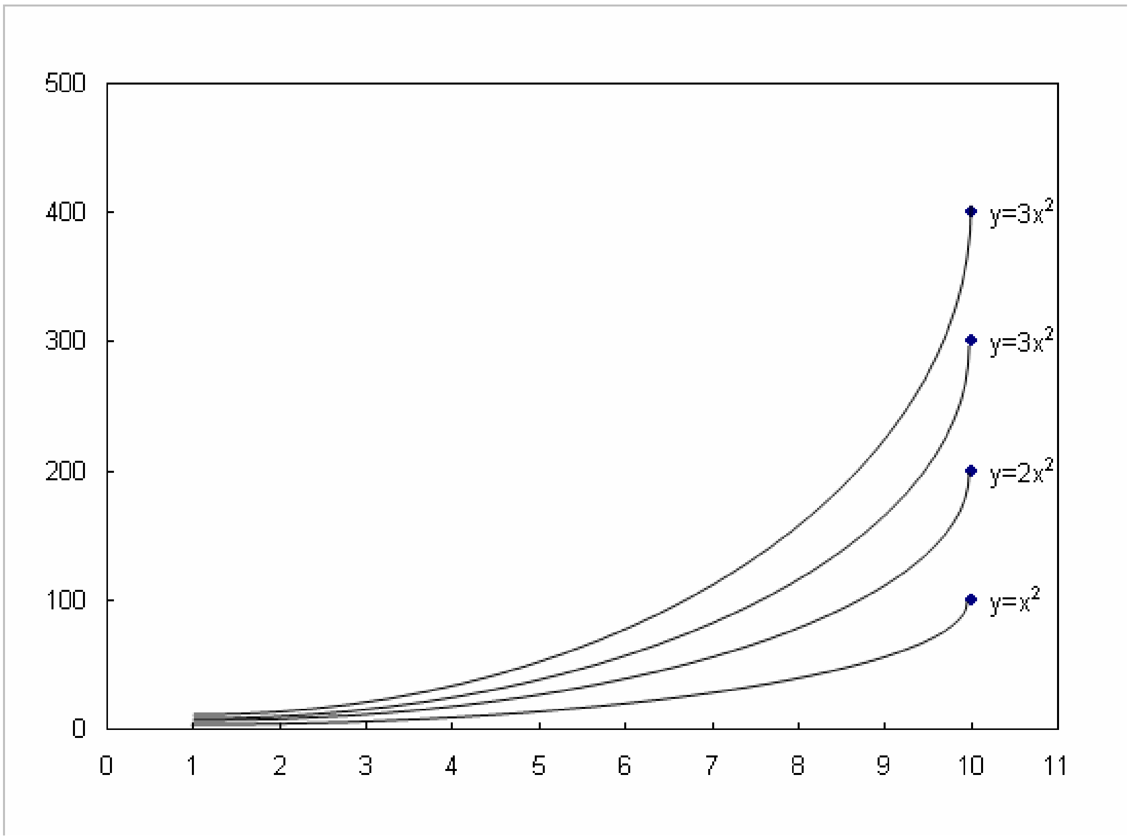
X	A = f(x)
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Ensuite, nous traçons les points sur le graphique.



Expression écrite d'une fonction





Expression écrite d'une fonction

Nous avons dessiné des graphiques représentant les fonctions $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$ et $y = 4x^2$, ainsi, nous pouvons remarquer les relations entre ces fonctions.

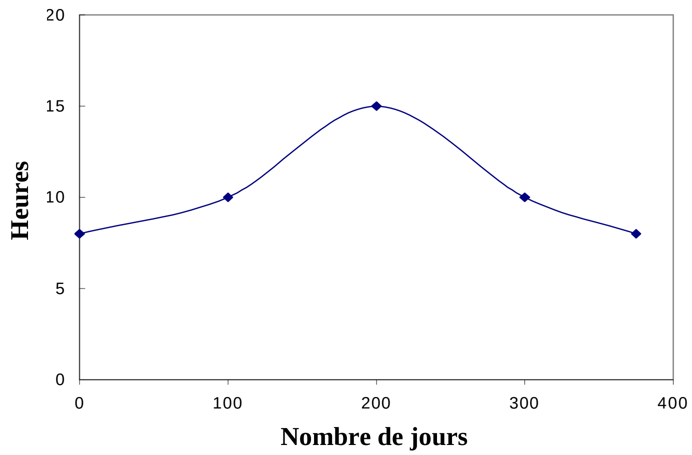
Ces fonctions appartiennent au même groupe. Il a été décidé d'appeler $y = x^2$ la fonction principale et nous pouvons constater qu'il y a beaucoup de fonctions de forme semblable, mais avec des valeurs différentes pour le coefficient de x^2.

Ensuite nous avons tracé la fonction $y = f(x) = x^3$.

Information sur les fonctions :

Une fonction f(x) peut être exprimée de plusieurs façons différentes, par exemple :

- En utilisant la formule (c'est la meilleure façon de représenter une fonction, lorsqu'il est possible de trouver la formule).
- En calculant la valeur de f avec toutes les valeurs possibles de x dans la fonction. Cette méthode n'est pas très pratique si le domaine de définition est vaste (cas où le domaine est égal à l'ensemble des nombres réels). Parfois énumérer la valeur de la fonction pour une série de valeurs qui vous intéressent aidera à clarifier la nature de la fonction.
- En traçant le graphique de la fonction. La variable indépendante (appelée x, à moins qu'il y ait une autre appellation) est mesurée le long de l'axe horizontal, et la variable dépendante (appelée y) est mesurée le long de l'axe vertical. Pour une valeur particulière x_1, la fonction lui fait correspondre la valeur $y_1 = f(x_1)$.



Expression écrite d'une fonction

Activité

Soit $f(x) = x^2$, calcule la valeur des fonctions suivantes.

1. $f(0)$
2. $f(1)$
3. $f(2)$
4. $f(a)$
5. $f(q)$
6. $f(a + b)$
7. $f(x + 2)$
8. $f(-1)$

Soit $f(x) = x^2 + 2x + 2$, calcule la valeur des fonctions suivantes.

9. $f(0)$
10. $f(1)$
11. $f(-1)$
12. $f(3)$
13. $f(a)$
14. $f(x + h)$
15. $f(x + h) – f(x)$

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, calcule la valeur des fonctions suivantes.

16. $f(4)$
17. $f(7)$
18. $f(3a^2b^2)$
19. $f(ab^2c^3)$

Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$, calcule la valeur des fonctions suivantes.

20. $f(15)$
21. $f(10)$
22. $f(5)$
23. $f(1)$
24. $f(0.5)$
25. $f(0.1)$
26. $f(0.01)$
27. $f(0.001)$

Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$, calcule la valeur des fonctions suivantes.

28. $f(15)$
29. $f(10)$
30. $f(5)$
31. $f(1)$
32. $f(0.5)$
33. $f(0.1)$
34. $f(0.01)$
35. $f(0.001)$

36. Y a-t-il une relation entre ces deux fonctions $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$, lorsque la valeur de x devient plus petite ?
37. Au sens précis du terme, ce n'est pas exact de dire que la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est la réciproque de la fonction $f(x) = x^2$, à moins de spécifier une restriction. Quelle est cette restriction ?

Une fonction est dite fonction impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour toutes les valeurs de x. Une fonction est dite fonction paire si $f(-x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x. Est-ce que les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'une ni l'autre ?

38. $f(x) = 20x$
39. $f(x) = x^2$
40. $f(x) = x^3$
41. $f(x) = x^2 + x$
42. $f(x) = 6x^5 + 4x^3 + 6x$

Thème II : Expressions algébriques

Leçon 1 : Simplifier et résoudre des équations linéaires à une inconnue

Le sais-tu ?

L'algèbre est cette partie des mathématiques qui étudie les relations pour lesquelles, les lettres et symboles sont utilisés pour représenter des nombres. Ainsi, les expressions algébriques contiennent des nombres et des lettres qui représentent des nombres et symboles (signes opératoires, racines carrées).

Lorsque deux expressions algébriques sont liées par le signe ‘’=’’ on parle d’équation.
Exemples :

(1) $2x + 3y = 4$;
(2) $2\,x + \frac{1}{2} = 1$;
(3) $xy - 4x = 1$;
(4) $x^2 + x - 3 = 0$

(1) est une équation linéaire à deux inconnues x et y.
(2) est une équation linéaire à une inconnue x.
(3) est une équation à deux inconnues x et y non linéaire.
(4) est une équation non linéaire à une inconnue x.

Une équation linéaire est dite du premier degré à une inconnue si le plus grand exposant de l’inconnue est 1.

Exemples :
$x + 4 = 7$; $3(x + 5) = 4(2x - 7)$.

Simplifier et résoudre des équations linéaires à une inconnue

Règles utilisées avec les équations algébriques et linéaires :

Si certaines équations sont simples à résoudre, ce n'est pas le cas pour d'autres équations assez complexes. Donc nous avons besoin d'une série de règles à utiliser pour résoudre les équations.

- Si A(x), B(x) et C sont des expressions algébriques, alors l'équation algébrique

A(x) = B(x) peut être exprimée comme suit :

Règle 1. A(x) + C = B(x) + C — Si on ajoute le même terme de part et d'autre du signe =, on obtient une équation équivalente.

Règle 2. A(x) – C = B(x) – C — Si on retranche le même terme de part et d'autre du signe =, on obtient une équation équivalente.

Règle 3. A(x) $\times$ c = B(x) $\times$c — Si on multiplie par un même nombre non nul c de part et d'autre du signe =, on obtient une équation équivalente.

Règle 4. $\frac{A(x)}{c} = \frac{B(x)}{c}$ — Si on divise par le même nombre c non nul de part et d'autre du signe =, on obtient une équation équivalente.

Équations équivalentes :

Deux équations équivalentes ont le même ensemble de solutions (des solutions identiques). Avec la résolution des équations linéaires du premier degré nous utilisons les propriétés des opérations algébriques pour obtenir différentes équations équivalentes. On peut continuer ce procédé jusqu'à obtenir une simple équation équivalente qui doit mener à la solution.

Exemple : Résous : 6x + 3 = 3x – 7.

Solution : Conçois des équations équivalentes en utilisant les règles mentionnées, pour aboutir à la solution :

$6x + 3 = 3x - 7$

$(6x + 3) - 3 = (3x - 7) - 3$ [Règle 1 : Soustrais (3) de part et d'autre du signe =]

$6x + \cancel{3} - \cancel{3} = 3x - 10$ [Simplifie et effectue l'opération]

$6x - 3x = (3x - 10) - 3x$ [Règle 2 : Soustrais (3x) de part et d'autre du signe =]

$3x = 3x - 10 - 3x$ [Simplifie et effectue l'opération]

$\frac{3x}{3} = \frac{-10}{3}$ [Règle 3: Divise par (3) de part et d'autre du signe =]

$x = \frac{-10}{3}$

Vérifie : 6$\left(\frac{-10}{3}\right) + 3 = 3\left(\frac{-10}{3}\right) - 7$

$$\frac{-60}{3} + \frac{9}{3} = \frac{-30}{3} - \frac{21}{3}$$

$$\frac{-51}{3} = \frac{-51}{3}$$

Simplifier et résoudre des équations linéaires à une inconnue

Indications pour résoudre des équations linéaires ou du premier degré :

L'exemple précédent utilise les indications pour résoudre les équations linéaires. Ces indications peuvent être résumées par les cinq étapes suivantes :
Étape 1 : Additionne ou soustrais le même terme constant aux deux membres de l'égalité. Réduis les deux membres de l'égalité.
Étape 2 : Additionne ou soustrais la même expression aux deux membres de l'égalité. Réduis les deux membres de l'égalité.
Étape 3 : Multiplie ou divise par le même nombre non nul les deux membres de l'égalité pour isoler l'inconnue avec un coefficient égal à 1.
Étape 4 : Simplifie, si nécessaire pour trouver la solution.
Étape 5 : Remplace la valeur trouvée dans l'équation originale pour vérifier la solution.

Considère cette équation algébrique :

$$x - 3 + 3(x + 5) = 4(2x - 7)$$

Réduis les expressions, trouve la valeur de x et vérifie si la solution est correcte.

Solution :

(1) Premièrement simplifie l'équation donnée autant que faire se peut.

$x - 3 + 3(x + 5) = 4(2x - 7)$

$x - 3 + 3x + 15 = 8x - 28$ [Effectue les produits]

$4x + 12 = 8x - 28$ [Regroupe]

(2) Transpose tous les termes constants d'un membre vers l'autre membre.

$4x + 12 - 12 = 8x - 28 - 12$ [Règle 1: Soustrais12 de part et d'autre]

(3) Transpose tous les termes contenant l'inconnue d'un même côté.

$4x - 8x = 8x - 40 - 8x$ [Règle 2 : Soustrais 8x de part et d'autre]

$-4x = -40$ [Regroupe]

(4) Divise les deux membres par - 4.

$\frac{-4x}{-4} = \frac{-40}{-4}$ [Règle 3 : Divise les deux membres par -4]

pour isoler l'inconnue

$x = 10$ [Règle 4]

Simplifier et résoudre des équations linéaires à une inconnue

(5) Vérifie : Remplace x par la valeur trouvée dans l'équation originale. [Règle 5]

$$10 - 3 + 3(10 + 5) = 4(2 \times 10 - 7)$$
$$7 + 3(15) = 4(20 - 7)$$
$$7 + 45 = 4(13)$$
$$52 = 52$$

Remarque : Le côté vers où tu dois transposer l'inconnue n'est pas important mais par convention l'inconnue est transposée à gauche et les nombres constants sont transposés à droite.

Eliminer le dénominateur d'une fraction dans une équation :

Si une équation algébrique contient une fraction, on peut l'éliminer en multipliant chaque terme de l'équation par le dénominateur de la fraction.

Exemple : $\frac{x-3}{2} = 3$

$$2\left(\frac{x-3}{2}\right) = 2(3) \quad \text{[multiplication des deux termes par 2]}$$

$$\cancel{2}\frac{(x-3)}{\cancel{2}} = 2(3) \quad \text{[simplification par 2]}$$

$$x - 3 = 6$$
$$x - 3 + 3 = 6 + 3 \quad \text{[Ajoutons 3 aux deux membres]}$$
$$x = 9$$

Vérification : $\frac{x-3}{2} = 3$ [remplacement de x par la valeur trouvée 9]

$$\frac{(9)-3}{2} = \frac{6}{2}$$
$$= 3$$

Simplifier et résoudre des équations linéaires à une inconnue

Plus petit dénominateur commun (PPDC) :

Si une équation algébrique contient deux (2) fractions ou plus, on peut éliminer les dénominateurs en multipliant chaque terme de l'équation par le PPMC des dénominateurs. Le PPDC est le plus petit multiple commun des dénominateurs.

Exemple : $\frac{x+2}{4} + \frac{7x-2}{6} = 3$

Solution: $\frac{x+2}{4} + \frac{7x-2}{6} = 3$ [le PPMC de 4 et 6 est égale à 12]

$$12\ \frac{(x+2)}{4} + 12\left(\frac{7x-2}{6}\right) = 3$$ [en multipliant par le PPMC (12)]

$$3(x+2) + 2(7x-2) = 36$$
$$3x + 6 + 14x - 4 = 36$$
$$14x + 3x = 36 - 6 + 4$$
$$17x = 34$$
$$x = \frac{34}{17}$$
$$x = 2$$

Vérification : $\frac{x+2}{4} + \frac{7x-2}{6} = 3$

$$\frac{(2)+2}{4} + \frac{7(2)-2}{6} = \frac{4}{4} + \frac{12}{6}$$
$$= 3$$

Remarque : Le procédé utilisé pour trouver l'inconnue x peut être utilisé aussi pour résoudre des équations contenant plusieurs lettres en plus de l'inconnue que l'on veut trouver.

Exemple : Trouve l'inconnue x dans l'équation : mx – 3a = 7b où m est différent de zéro

Solution : $mx - 3a = 7b$

$mx - 3a + 3a = 7b + 3a$ [en ajoutant 3a de part et d'autre]

$mx = 7b + 3a$ [en simplifiant]

$\frac{mx}{m} = \frac{7b+3a}{m}$ [en divisant par m (avec m $\neq 0$)]

$$x = \frac{7b+3a}{m}$$

Simplifier et résoudre des équations linéaires à une inconnue

Vérification : $\frac{m(7b+3a)}{m}$ - 3a = 7b [en remplaçant x par sa valeur $\frac{7b+3a}{m}$]

(7b + 3a) – 3a = 7b + 3a -3a
= 7b

Remarque :
Certaines équations n'ont pas de solution. Souvent, la seule façon pour le savoir est de tenter de résoudre les équations en question.

Exemple :
Résous cette équation : 3(2x + 4) – 7 = 2(3x – 1)

Solution :

3(2x +4) – 7 = 2(3x – 1)
6x + 12 – 7 = 6x – 2
6x + 5 = 6x – 2
En retranchant 6x de part et d'autre de l'équation
0x + 5 = 0x - 2

On trouve 5 = -2.
Ce qui est faux! Ainsi, il n'y a pas de solution pour cette équation.

Simplifier et résoudre des équations linéaires à une inconnue

Activité

Résous les équations suivantes :

1. $3x - 12 = 0$
2. $\frac{1}{3}x + 8 = 0$
3. $2x + 9 = x - 13$
4. $7y + 8 = 3y - 16$
5. $6 + \frac{z}{5} = -\frac{2}{3}$
6. $0{,}5m - 1{,}3 = 0{,}7(m - 0{,}6)$
7. $\frac{1}{4}x + 5 = 3x - \frac{5}{2}$
8. $\frac{x-5}{2} - 7 = \frac{2-3x}{5} + \frac{3}{10}$
9. $x - (5 - x) - 3$
10. $v - (v + 4)(v - 1) = 6 - v^2$
11. $\frac{1}{3} = \frac{u}{u+1} - \frac{4}{3}$
12. $\frac{1}{2r+2} - 1 = \frac{2}{r+1}$

Thème II : L es expressions algébriques, les polynômes et les fonctions

Leçon 2 : Résoudre les inéquations et les équations avec valeurs absolues à une variable au premier degré

Le sais-tu ?

Une expression donnée sous la forme “x est inférieur strictement à y,” représentée par $x < y$, ou “a est supérieur strictement à b,” représentée par $a > b$, est appelée <u>une inégalité</u>. Le sens de la flèche des signes des inéquations est toujours pointée vers le nombre le plus petit. Les inégalités contenant seulement des nombres sont soit vraies (par exemple, $10 > 7$), soit fausses (par exemple, $4 < 3$).

Les inégalités contenant des variables peuvent être vraies, seulement pour certaines valeurs de la variable (par exemple $x < 3$).

Si tu fais intervenir l’ordre entre les expressions algébriques, tu travailles avec les inéquations. Les quatre relations ou symboles que tu vas utiliser pour présenter des inéquations algébriques sont :

$>$ ‘’strictement supérieur à …’’ $\geq$ ‘’supérieur ou égale à …’’
$<$ ‘’strictement inférieur à …’’ $\leq$ ‘’inférieur ou égale à …’’

Exemples d’inéquations : $x - 5 > 10$; $\frac{8+y}{4} \leq 28$ et $0{,}09 < (2r - 0{,}5) < 0{,}13$

En travaillant avec les inéquations du premier-degré, tu es encore amené à toujours chercher des solutions, les valeurs de la variable qui vérifient l'inéquation. Notons que la ou les solutions d'une inéquation est un ensemble de valeurs. Cette ensemble peut avoir une valeur unique, un nombre fini de valeurs, ou peut être un intervalle de valeurs.

Exemple :

Exprime la ou les valeur(s) qui vérifient les inéquations ci-dessous :

(a) $4x + 3 > 15$ (b) $4x + 3 \geq 15$

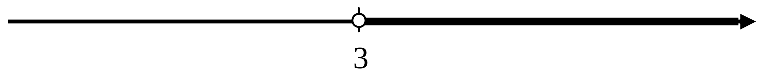
Solution :

(a) Choisis des valeurs arbitraires de x par ensemble 2, -1, 4 et 6.
Vérifie que 2 et -1 ne sont pas solution de l’inéquation.
(b) Considère les valeurs $x = 6$ et $x = 4$, tu remarqueras qu’elles sont solutions de l'inéquation $4x + 3 > 15$ car :

Résoudre les inéquations et les équations avec valeurs absolues à une variable au premier degré

$4(6)+3 = 27$	$4(4)+3=19$
et $27>15$	et $19>15$

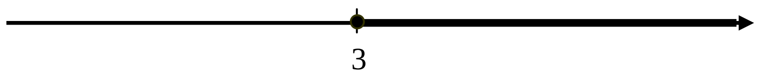
Mais les nombres 4 et 6 ne sont pas les seules valeurs. N'importe quel nombre supérieur à 3 constitue une solution possible. En d'autres termes, l'ensemble des nombres plus grands que 3 est l'ensemble des solutions de cette inégalité.
Tu peux représenter cet intervalle dans le graphique ci-dessous.



Note que 3 n'est pas une solution de l'inéquation. Tu peux aussi présenter autrement cette série de solutions.
Tu peux utiliser :

(1) {x| x > 3}, que tu peux lire par " x tel que x est strictement supérieur à 3";
(2)]3, ∞[, indiquant la série des nombres contenus dans l'intervalle de 3 jusqu'à l'infinie (avec la valeur 3 exclue de l'intervalle.

(c) Tout ce qui est vrai avec 4x + 3 > 15 l'est aussi avec 4x + 3 ≥ 15, sauf que dans la dernière inéquation, 3 fait partie de la solution [3, ∞[. Ainsi 4(3) + 3 = 15. Voir graphique ci-dessous.



Les règles qui seront utilisées pour résoudre les inéquations sont pareilles aux règles qui sont utilisées pour résoudre les équations sauf celles relatives à la multiplication (Règle 3) et à la division (Règle 4). Ainsi,

Règle 3' : Si A < B, alors AC < BC si C> 0	Multiplier les deux membres de l'inéquation par le même nombre positif ne change pas le sens de l'inégalité.
ou AC > BC si C < 0	Multiplier les deux membres de l'inéquation par le même nombre négatif change le sens de l'inégalité.
Règle 4' : Si A < B, alors $\frac{A}{D} > \frac{B}{D}$ si D > o	Diviser les deux membres de l'inéquation par le même nombre positif ne change pas le sens de l'inégalité.

Résoudre les inéquations et les équations avec valeurs absolues à une variable au premier degré

ou $\frac{A}{D} > \frac{B}{D}$ si D < 0 Diviser les deux membres de l'inéquation par le même nombre négatif change le sens de l'inégalité.

Exemples : Trouve la solution des inéquations (a) -4x < 8 et (b) $\frac{2-x}{3} \geq \frac{1}{4}$.

Solution :

a) -4x < 8, divise les deux termes par (-4) et change le sens de l'inégalité pour obtenir

$$\frac{-4x}{-4} > \frac{8}{-4}$$

x > -2

Les valeurs de x qui justifient l'inégalité originale sont tous les nombres strictement supérieurs à (-2), qu'on peut représenter par {x| x, x > -2} ou]-2, ∞[.

b) $\frac{2-x}{3} \geq \frac{1}{4}$, multiplie par 12, le PPDC, pour simplifier les fractions et obtenir

$$\frac{12(2-x)}{3} \geq \frac{12(1)}{4}$$

$4(2 - x) \geq 3$ [Simplifie]

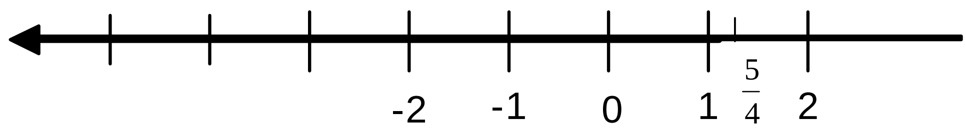
$8 - 4x \geq 3$ [Règle 2 : Retranche (8) des deux côtés]

$$(8-4x)-8 \geq 3-8$$

$-4x \geq -5$ [Règle 4 : Divise par (-4) et change le sens de l'inégalité]

$$x \leq \frac{5}{4}$$

Solution : {x| x , x ≤ $\frac{5}{4}$} ou]- ∞, $\frac{5}{4}$]:



Résoudre les inéquations et les équations avec valeurs absolues à une variable au premier degré

Indications pour résoudre les systèmes d'inéquations :

Les inéquations peuvent avoir plus d'un symbole relationnel ou d'inégalité. Ces expressions algébriques sont appelées des systèmes d'inéquations. Ces systèmes d'inéquations ne se résolvent pas de la même manière que les inéquations simples.

Exemple : $2 < 6x - 4 \leq 20$.

Solution : tu traiteras cette inégalité comme si tu traitais deux inéquations en même temps. Alors tu essaies d'isoler x entre les deux inégalités.

$2 < 6x - 4 \leq 20$ [Ajoute (4) à chaque expression]

$2 + 4 < (6x - 4) + 4 \leq 20 + 4$ [Simplifie]

$6 < 6x \leq 24$

$1 < x \leq 4$

Solution : $\{x|\ x > 1 \text{ et } x \leq 4\}$, qui est l'intervalle] 1, 4] ; x supérieur à 1 et x inférieur ou égale à (4).

Remarques : Tu peux utiliser des notations variées pour exprimer la solution d'un système d'inéquations. La notation $\{x|\ x > 1 \text{ et } x \leq 4\}$ est équivalente à la notation sous forme d'intervalle] 1, 4] ou de graphique ci-dessus.

Exemple : $2 < \dfrac{-4x+2}{3} < 6$.

Solution : [Multiplie chaque expression par (3)]

$$3(2) < 3\frac{(-4x+2)}{3} < 3(6)$$

$6 < -4x + 2 < 18$

[Additionne (-2) à chaque expression]

$6 - 2 < -4x + 2 - 2 < 18 - 2$

[Simplifie]

$4 < -4x < 16$

[Divise chaque expression par (-4) et change le sens des inégalités]

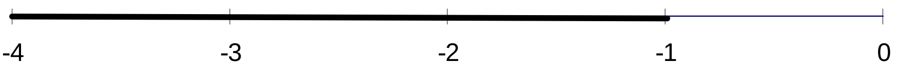
$$\frac{4}{-4} > \frac{-4x}{-4} > \frac{16}{-4}$$

Résoudre les inéquations et les équations avec valeurs absolues à une variable au premier degré

-1 > x > -4

[Réécris les inéquations]

-4 < x < -1



Remarque : Avec les inéquations composées, nous avons l'habitude d'écrire les petits nombres à gauche et les grands nombres à droite de l'expression. En outre, les signes des inéquations ne sont pas opposés (ils ont le même sens).
Exemples : 1 < 2 < 3 est une expression correcte; mais 3 > 2 < 4 est incorrecte.

Équations et inéquations avec valeur absolue :

Avec certains problèmes en mathématique nous sommes souvent intéressés à la distance indirecte entre le point d'origine et tout autre point x sur la droite ou la courbe. Cette distance indirecte est appelée la valeur absolue de x et est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Par exemple, en utilisant la définition, nous avons $|5|$ = 5; $|-5|$ = 5; $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$; etc.

Valeur absolue et équations :

En général, si $|x|$ = d, alors x = d ou x = -d; c’est a dire x = ±d.

Exemple : $|x|$ = 3.

Solution : Puisque la distance du point d'origine à un point x est de 3 unités, nous pouvons conclure que la valeur de x est de (+3) si le point est à droite de l'origine et qu'elle est égale à (-3) si le point est à gauche. Ainsi les solutions de $|x|$ = 3 sont x = 3 et x = -3.

Pour une expression A(x), si $|A(x)|$ = k, alors A(x) = k ou A(x) = -k, ou A(x) = ±k.

Exemple : $|x-4|$ = 3.

Solution : Écris l’équation comme s’il s’agissait de deux équations.

Résoudre les inéquations et les équations avec valeurs absolues à une variable au premier degré

$x - 4 = 3$ ou $x - 4 = -3$ [$\pm k = \pm 3$]

$x = 4 + 3$ ou $x = 4 - 3$

Ainsi, $x = 7$ ou $x = 1$ (Ces deux valeurs constituent les solutions).

Vérification : $|7-4| = 3$ $|1-4| = 3$

$|3| = 3$ $|-3| = 3$

Inéquations avec valeur absolue:

Á partir de la définition de la valeur absolue, l'expression algébrique $|ax+b| < c$ où $c > 0$ est équivalente à la paire d'inéquations :

$$ax + b < c \qquad \text{avec } ax + b \geq 0$$
$$-(ax + b) < c \qquad \text{avec } ax + b < 0$$

Ensuite, si nous multiplions les deux membres de l'inéquation $-(ax + b) < c$ par (-1), nous changeons le sens de l'inégalité et nous obtiendrons une expression équivalente : $ax + b > -c$. Maintenant, nous pouvons tirer une conclusion :
L'inéquation $|ax+b| < c$ est équivalente à la paire d'inéquations

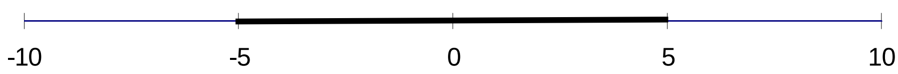
$$ax + b < c \text{ et } ax + b > -c$$

qui peut être écrite aussi sous la forme suivante : $-c < ax + b < c$.
Ainsi, résoudre l'inéquation $|ax+b| < c$, équivaut à résoudre l'expression $-c < ax + b < c$.

Exemple 1 : $|x| < 5$.

Solution : La solution de $|x| < 5$ est l'ensemble des nombres compris entre l'intervalle (-5) et (+5).

$$-5 < x < 5$$



L'interprétation géométrique de $|x| < 5$ montre que l'intervalle de la distance indirecte entre l'origine est de 5 unités.

Exemple 2 : $|2x-3| < 7$.

Solution :
Commence par écrire l'inégalité sous sa forme décomposée.

Résoudre les inéquations et les équations avec valeurs absolues à une variable au premier degré

$|2x-3| < 7 \iff \begin{cases} 2x - 3 \langle 7 \\ 2x - 3 \rangle -7 \end{cases}$ $\qquad$ $|ax+b| < c \iff \begin{cases} ax + b \langle c \\ ax + b \rangle -c \end{cases}$

Qui se traduit par :

$-7 < 2x – 3 < 7$ $\qquad$ $[-c < ax + b < c]$

Applique les règles avec les inéquations :

[Ajoute (3) dans chaque membre]

-7 + 3 < 2x – 3 + 3 < 7 + 3

[Simplifie]

-4 < 2x < 10

[Divise chaque terme par (2)]

$$-\frac{4}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{10}{2}$$

[Simplifie]

-2 < x <5

Tous les nombres contenus dans l'intervalle]-2, 5[représentent la solution. Voir graphique ci-dessous.

N'importe quelle valeur de x dans l'intervalle de la solution peut se substituer à x au niveau de l'expression originale et l'inégalité reste vraie.

Nous résolvons la paire équivalente séparément quand l'inégalité est > ou ≥.

Exemple : $\left|\frac{x-3}{4}\right| \geq 2.$

Solution : Cette inéquation est équivalente à la paire d'inéquations suivantes :

$$\frac{x-3}{4} \geq 2 \quad \text{si} \quad \frac{x-3}{4} > 0$$

ou $$-\left(\frac{x-3}{4}\right) \geq 2 \quad \text{si} \quad \frac{x-3}{4} < 0$$

Trouve la solution pour chaque expression :

Résoudre les inéquations et les équations avec valeurs absolues à une variable au premier degré

$\frac{x-3}{4} \geq 2$ ou $-\left(\frac{x-3}{4}\right) \geq 2$

$x - 3 \geq 8$ ou $\frac{x-3}{4} \leq -2$

$x \geq 11$ ou $x - 3 \leq -8$

$x \leq -5$

Ainsi la solution est la suivante $\{x \mid x \leq -5 \text{ et } x \geq 11\}$:

Résoudre les inéquations et les équations avec valeurs absolues à une variable au premier degré

Activité 1

1. Résous l'inéquation $(4x - 2) - (5 - 3x) \leq 3 + 2x$ et fais un graphique de la solution.
2. Résous l'inéquation $5(x + 4) - 3(x + 7) \geq 5$ et fais un graphique de la solution.
3. Résous l'inéquation $-2(x - 1) + 4(x + 6) \leq 0$ et fais un graphique de la solution.
4. Résous l'inéquation $2x - 8 = -x + 3(x - 5)$ et fais un graphique de la solution.
5. Résous l'inéquation $4(x - 1) + 6 < 2(x - 1) + (3 - 5x)$ et fais un graphique de la solution.
6. Résous le système d'inéquation $-5 < 3z + 4 < 16$ et fais un graphique de la solution.
7. Résous le système d'inéquation $3 + x < 5x - 2 < x + 13$ et fais un graphique de la solution.
8. Résous l'équation avec valeur absolue $|3x - 4| = 8$ et fais un graphique de la solution.
9. Résous l'équation avec valeur absolue $|-2x + 3| + 5 = 11$ et fais un graphique de la solution.
10. Résous l'inéquation avec valeur absolue $|4x + 3| < 9$ et fais un graphique de la solution.
11. Résous l'inéquation avec valeur absolue $|x - 4| > 17$ et fais un graphique de la solution.
12. Résous l'inéquation avec valeur absolue $|x - 3| + 5 < 8$ et fais un graphique de la solution.

Thème II : Les expressions algébriques, les polynômes et les fonctions

Leçon 3 : Résolution des équations et inéquations à une variable au second degré

Le sais-tu ?

Une équation sous la forme a x^2 + bx + c = 0; (où a, b et c sont des constantes et a $\neq$ 0) est une équation du second degré (ou équation quadratique). Simplifier et résoudre une équation au 2nd degré consiste à trouver la ou les valeur(s) de x qui vont satisfaire l'équation (qui vont la rendre vraie). Ces valeurs sont les racines de l'équation, et l'ensemble des racines représente les solutions. Une équation du second degré admet toujours deux racines :

- Les deux racines peuvent être des nombres réels et différents.
- Les deux racines peuvent être des nombres réels confondus.
- Les deux racines peuvent être des nombres complexes qui ne sont pas des nombres réels.

Il y a trois façons de résoudre les équations du second degré : factoriser, compléter le carré ou utiliser la formule d'une équation au 2nd degré.

Résolution d'une équation au 2nd degré par factorisation :

La méthode de factorisation dépend du principe du produit nul, à savoir :

Si A $\bullet$ B = 0, alors soit A = 0 soit B = 0 (ou A et B sont tous les deux égaux à 0).

Si une équation du 2nd degré peut être factorisée, on peut appliquer ce principe en statuant que chaque facteur est égal a zéro et en trouvant la valeur de x à partir des équations linéaires résultantes.

Exemple : Résous cette équation du 2nd degré (x^2 + 5x + 4 = 0) par la méthode de factorisation.

Solution : $x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x + 4)(x + 1) = 0$

Soit (x + 4) = 0, soit (x + 1)= 0.

Ainsi : Si x + 4 = 0, alors x = -4 ;

Si x + 1 = 0, alors x = -1.

Résolution des équations et inéquations à une variable au second degré

Vérification : $(-4)^2 + 5(-4) + 4 = 16 - 20 + 4$; $(-1)^2 + 5(-1) + 4 = 1 - 5 + 4$

$= -4 + 4$ $= -4 + 4$

$= 0$ $= 0$

Il y a deux valeurs réelles de x qui vérifient l'équation ; ainsi x = -4 et x = -1 sont les solutions de l'équation ; l'ensemble des solutions est :{ -4, -1}.

Exemple : Résous $x^2 - 5x = 0$

Solution : Le premier membre de l'équation $(x^2 - 5x)$ est sous la forme $ax^2 + bx + c$ (avec a = 1, b = -5 et c = 0) et elle peut être factorisée :

$$x^2 - 5x = 0$$
$$x(x - 5) = 0$$

Ainsi avec la règle du produit nul on a :

$x = 0$ ou $x - 5 = 0$

$x = 5$

et la solution est : {0, 5}

Vérification : $0^2 - 5 \times 0 = 0 - 0$ $5^2 - 5\times 5 = 25 - 25$

$= 0$ $= 0$

Exemple : Résous $x^2 - 16 = 0$

Solution : $x^2 - 16 = 0$

$(x - 4)(x + 4) = 0$

Ainsi : $x - 4 = 0$ ou $x + 4 = 0$

$x = 4$ $x = -4$

Remarque : Nous pouvons aussi résoudre cet exemple ci-dessus de la manière suivante :

$$x^2 = 16$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

$|x| = 4$

x = + 4 ou x = -4 , ce qui donne les mêmes solutions.

Résolution des équations et inéquations à une variable au second degré

Lorsqu'une équation du 2nd degré est sous la forme $(Ax + B)^2 = C$, A, B, et C étant des constantes et $A \neq 0$, on peut résoudre l'équation sans la factoriser au préalable. Pour cela, nous utilisons la règle ci-dessous :

$$\text{Si } H^2 = K^2 \text{, alors } H = +K \text{ ou } H = -K$$

De la même manière que nous pouvons multiplier et diviser par des valeurs égales, nous pouvons aussi prendre les racines carrées de valeurs positives égales.
Exemple : Résous $(x – 4)^2 = 9$

Solution : comme $(x – 4)^2$ et 9 sont positifs, calcule les racines carrées de part et d'autre du signe (=) :

$$\sqrt{(x-4)^2} = \sqrt{9}$$

$$x – 4 = 3 \text{ ou } x - 4 = -3$$

$$x = 4 + 3 \quad \text{ou} \quad x = 4 – 3$$

$$x = 7 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Vérification : $(7 – 4)^2 = 3^2 = 9$ $\qquad$ $(1 – 4)^2 = (-3)^2 = 9$

Les racines de l'équation sous la forme $(Ax + B)^2 = C$ peuvent ne pas être des nombres réels.
Dans ce cas l'équation n'admet pas de solution dans l'ensemble des nombres réels IR. On dit que l'ensemble des solutions est vide dans IR.
Tu verras plus tard des ensembles dans lesquels ces équations admettent des solutions.

Exemple : Résoudre dans IR $(2x + 5)^2 = -9$
Cette équation n'a pas de solution dans IR.
NB : l'équation de la forme $(Ax + B)^2 = C$, avec C négatif, n'admet pas de solution dans IR car le carré d'un nombre n'est jamais négatif.

Résolution des équations et inéquations à une variable au second degré

Résolution d'une équation au 2nd degré en complétant le carré :

Nous pouvons résoudre les équations du 2nd degré à travers d'autres méthodes. Beaucoup d'équations du 2nd degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ peuvent être transformées sous la forme $(Ax + B)^2 = C$, de façon à ce que l'équation puisse être résolue en calculant les racines carrées. Ce procédé est appelé ''**complèter le carré''** et il implique l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division par un terme approprié aux deux membres de l'équation donnée de sorte à avoir un carré à gauche. Il y a sept étapes nécessaires pour résoudre une équation en complétant le carré :

Étape 1: Divise tous les termes de l'équation par le coefficient de x^2.

Étape 2: Soustrais le terme constant $\frac{c}{a}$ des deux côtés.

Étape 3: Trouve le nombre égal à la moitié du coefficient de x; et élève le au carré.

Étape 4: Ajoute la valeur calculée dans l'étape 3 aux deux côtés de l'équation.

Étape 5: Transforme le membre de gauche du trinôme en un binôme au carré.

Étape 6: Simplifie le membre de droite de l'équation.

Étape 7: Résous la dernière équation en trouvant ses racines.

Exemple : Résous $2x^2 + 8x - 3 = 0$ en complétant le carré.

Solution : Suis les sept (7) étapes indiquées:

$2x^2 + 8x - 3 = 0$

$x^2 + 4x - \frac{3}{2} = 0$ [Étape 1]

$x^2 + 4x = \frac{3}{2}$ [Étape 2]

Trouve $\frac{1}{2}(4) = 2$ et calcule $2^2 = 4$. [Étape 3]

$x^2 + 4x + 4 = \frac{3}{2} + 4$ [Étape 4]

$(x+2)^2 = \frac{3}{2} + 4$ [Étape 5]

$(x+2)^2 = \frac{11}{2}$ [Étape 6]

$x + 2 = +\sqrt{\frac{11}{2}}$ ou $x + 2 = -\sqrt{\frac{11}{2}}$ [Étape 7]

$x = -2 + \sqrt{\frac{11}{2}}$ ou $x = -2 - \sqrt{\frac{11}{2}}$

Résolution des équations et inéquations à une variable au second degré

Exemple : Résous $x^2 - 7x - 5 = 0$ en complétant le carré.

Solution :

$$x^2 - 7x - 5 = 0$$

$$x^2 - 7x \quad = 5 \qquad \text{[Étapes 1 et 2]}$$

$$x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 5 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \qquad \text{[Étapes 3 et 4]}$$

$$x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 5 + \frac{49}{4} \qquad \text{[Simplifie]}$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{69}{4} \qquad \text{[Étapes 5 et 6]}$$

$$\text{x - } \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{69}{4}} \quad \text{ou x - } \frac{7}{2} = -\sqrt{\frac{69}{4}} \qquad \text{[Étape 7]}$$

$$\text{x} = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{69}{4}} \quad \text{ou} \quad \text{x} = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{69}{4}} \qquad \text{[Simplifie]}$$

Résolution des équations et inéquations à une variable au second degré variable au second degré

Inéquations du second degré :

Lorsqu'on résous une inéquation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c > 0$, on commence par factoriser le premier membre $ax^2 + bx + c$ en produit de facteurs du premier degré, ensuite on étudie le signe de chacun de ces facteurs du premier degré ; puis on dresse le tableau de signes en appliquant la règle du signe d'un produit.

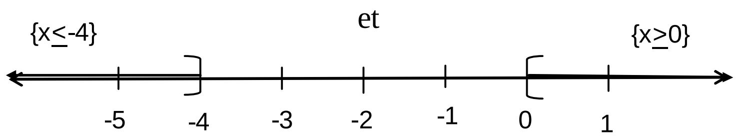
Exemple : Résous $x^2 + 4x \geq 0$

Solution :

$x^2 + 4x \geq 0$

$x(x + 4) \geq 0$

x	$-\infty$	-4		0	$+\infty$
x	-		-	0	+
x + 4	-	0	+		+
x(x +4)	+	0	-	0	+



Résolution des équations et inéquations à une variable au second degré

1. Résous $x^2 - 25 = 0$
2. Résous $(2x-1)^2 = 16$
3. Résous $(2x+3)^2 = 10$
4. Résous $x^2 - 7x + 6 = 0$
5. Résous $x^2 - 11x + 24 = 0$
6. Résous $x^{2-} 2x + 5 = 0$
7. Résous $3x^2 - 9x - 12 = 0$
8. Résous $2x^2 - x - 3 = 0$
9. Résous $x^2 - 6x = 4$
10. Résous $-x^2 + 8x - 7 = 0$
11. Résous $x^2 + 2x - 8 \leq 0$
12. Résous x^2 $-6x + 9 = 0$
13. Résous $4x^2 + 8x + 4 = 0$
14. Résous $x^2 + 7x \leq 0$.
15. Résous $2x^2 - 5x > 0$.

Thème II : Les expressions algébriques, les polynômes et les fonctions

Leçon 4 : Les polynômes

Le sais-tu ?

En général, les polynômes sont constitués de variables inconnues (ou arbitraires) et de nombres fixes (ou connus).
La lettre (x) est d'habitude utilisée pour indiquer un nombre inconnu que l'on appelle une **variable.**

Le nombre fixe est appelé une **constante**.

Si n est un nombre naturel et x représente n'importe quel nombre réel, alors nous pouvons écrire l'expression x^n (avec n une puissance positive de x), où x est la base et n est l'exposant), de la manière suivante :

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{\text{n fois}}$$

Par exemple, $4^3 = 4 \times 4 \times 4$ et $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2)$, alors que $5^1 = 5$. Aussi, $x^0 = 1$ pour toute valeur de x différente de zéro; c'est à dire que la valeur de tout nombre réel à la puissance 0 est toujours égale à 1.
La base des polynômes est le monôme cx^n, où :

c est une constante, (c étant un nombre réel quelconque) ;
x est une variable ;
n est un nombre entier positif(n = 0, 1, 2, 3,…).

La constante dans le monôme est aussi appelée un **coefficient**. Les polynômes $3x^4$ et $\frac{16}{3}y^5$ sont des monômes, avec des coefficients de 3 et $\frac{16}{3}$; des variables x et y, respectivement. Cependant $\frac{3}{x}$ et $3\sqrt{x}$ ne sont pas des monômes, parce que la variable dans un monôme ne doit pas avoir un exposant négatif, ni sous forme de fraction.
Remarque : Un exposant négatif de n'importe quelle puissance d'un nombre, exemple x^{-n}, indique l'inverse de cette puissance du nombre ; $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Un nombre avec un exposant sous forme de fraction, exemple $x^{\frac{1}{2}}$, indique la racine carrée de ce nombre ; ($x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$)

Les polynômes

Le monôme constitue un terme d'un polynôme; ainsi un monôme (exemple cx^n**)** est un polynôme avec un terme. Si nous additionnons deux monômes (ax^m et bx^n avec m différent de n), nous obtenons un binôme ($ax^m + bx^n$), qui est un polynôme à deux termes.

Remarque : a, b, et c sont des constantes (coefficients) ; les exposants m et n sont des nombres entiers positifs.

Exemple : Peux-tu expliquer pourquoi les expressions suivantes sont des polynômes ?

(a) $2^2 y$

(b) $5x - 3$

(c) $5z^2 + 4^{-2} z + 3$

(d) $\sqrt{5}x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$

Solution : Chacune de ces expressions est composée d'un ou de plusieurs monômes de la forme cx^n ; par conséquent, ces expressions sont des polynômes.

(a) L'expression ($2^2 y$) est un monôme dont le coefficient $c = 2^2 = 4$ et l'exposant égal 1 pour la variable y.

(b) L'expression ($5x - 3$) est la différence de deux monômes, [ou la somme du monôme (5x) et du monôme (-3)], ce qui constitue un polynôme de deux termes, ou un binôme.

(c) L'expression ($5z^2 + 4^{-2} z + 3$) est un polynôme, chaque terme représente un monôme les exposants 2 et 1 de la variable z sont des nombres entiers positifs et les coefficients 5, 4, et 3 sont des nombres réels.

(d) Pour l'expression ($\sqrt{5}x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$), chaque terme représente un monôme, les coefficients $\sqrt{5}$, $-\dfrac{3}{2}$ et 4 sont des nombres réels (les coefficients) et les exposants de la variable x sont les nombres entiers positifs (4, 2 et 1).

Remarque : Un monôme n'a pas nécessairement une seule variable. Une expression comme $3x^2y^2$ est un monôme à deux variables (x et y). $-6xy^2z^4$ est un monôme à trois variables (x, y, et z). Ces monômes à variables multiples peuvent former des polynômes.

Les polynômes

Exemple : Explique pourquoi les expressions suivantes ne sont pas des polynômes.

(a) $\frac{2}{x} - 5$ (b) $6xy^{-2} + 3x^2y$ (c) $\frac{x}{y} + \frac{5z}{7} + 5^{-2}$

(d) $5^2 + 2t^{\frac{1}{2}}$ (e) $s^2 + 2\sqrt{t}$

Solution :

(a) La variable x est au dénominateur: $\frac{2}{x} - 5 = 2x^{-1} - 5$ [l'exposant (-1) n'est pas un nombre entier positif].
(b) Un exposant négatif au niveau de la variable n'est pas admis.
(c) La variable y est au dénominateur.
(d) L'exposant de t est une fraction.
(e) $2\sqrt{t}$ n'est pas un monôme.

Classification des polynômes :

Pour classer des polynômes, nous regardons d'abord le nombre de variables qu'ils possèdent. Un polynôme peut avoir une ou plusieurs variables. Après avoir déterminé le nombre de variables, nous pouvons faire la classification suivant leur **degré** :

- Le **degré d'un polynôme à une variable** est donné par le plus grand exposant de la variable ayant un coefficient non nul figurant dans son écriture.
  Ainsi le polynôme $x^2 + 6x + 9$ a pour variable x et son degré est 2, parce que le plus grand exposant sur la variable x est 2.
- Le **degré d'un polynôme à plusieurs variables** est la plus grande somme des exposants de variables qu'on peut obtenir parmi ses termes.
  Ainsi, le polynôme $x^4y^2 + 4x^3y^2 + 2xy$ a pour deux variables, x et y. Son degré est de (6), parce que la somme des exposants des variables x et y dans le 1er terme est de 6, comparée à la somme trouvée dans le 2nd (5) et dans le 3eme terme (2).

La forme générale d'un polynôme avec une variable x est :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

où chaque coefficient a_i est un nombre réel. Si $a_n \neq 0$, alors le degré du polynôme est de n.

Les polynômes

Opérations avec les polynômes :

A. Addition et soustraction :

Puisque les polynômes sont composés de termes qui représentent des nombres réels, toutes les règles des opérations sur les nombres réels s'appliquent à ceux-ci. Ainsi, si nous avons deux polynômes,
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, nous pouvons calculer leur somme S(x) et leur différence T(x), en regroupant leurs termes semblables et en additionnant ou soustrayant les coefficients des termes semblables.

Exemple : Trouver la somme des polynômes suivants $P(x) = 3x^2 + 4x - 7$ et $Q(x) = 7x^2 - 9x + 4$.

Solution : Tu dois aligner les termes semblables et faire l'addition des coefficients.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x - 7 \\ +\ \underline{7x^2 - 9x + 4} \\ 10x^2 - 5x - 3 \end{array}$$

Ou bien, tu peux réarranger les termes et regrouper les termes semblables :

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= \left(3x^2 + 4x - 7\right) + \left(7x^2 - 9x + 4\right) \\ &= \left(3x^2 + 7x^2\right) + \left(4x - 9x\right) + \left(-7 + 4\right) \\ &= (3 + 7)x^2 + (4 - 9)x - 7 + 4 \\ &= 10x^2 - 5x - 3 \end{aligned}$$

B. Multiplication :

Pour multiplier des monômes d'une même variable, nous additionnons les exposants : $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$; c'est à dire,

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x \cdot x}_{\text{n fois}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{\text{m fois}}}_{\text{(n + m) fois}} = x^{n+m}$$

Aussi, $\left(x^m\right)^n = x^{m \cdot n} = x^{mn}$.

NB : Pour la division des monômes de même variable, nous faisons la soustraction des exposants : $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

Ainsi, $\dfrac{x^6}{x^3} = x^{6-3} = x^3$ et $\left(x^2\right)^3 = x^{2\times 3} = x^6$.

Les polynômes

Maintenant nous pouvons calculer le produit de deux polynômes $P(x)\times Q(x)$ en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Exemple : Calcule le produit de $P(x)=x^2+3$ et $Q(x)=x+4$

Solution :
La méthode arithmétique :

$$\begin{array}{rrrrl}
P(x)= & & x^2 & +3 & \\
\underline{\times Q(x)=} & & \underline{\times(x+4)} & & \\
 & & +4x^2 & +12 & \text{[en multipliant chaque terme de la première expression par 4]} \\
 & x^3 & & +3x & \text{[en multipliant chaque terme de la première expression par x]} \\
 & & & & \text{[en faisant l'addition]} \\
P(x)\times Q(x)= & x^3 & +4x^2 & +3x+12 &
\end{array}$$

Ou bien on peut utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$\begin{aligned}
P(x)\cdot Q(x) &= \left(x^2+3\right)\cdot(x+4) \\
&= x\left(x^2+3\right)+4\left(x^2+3\right) \\
&= \left(x^3+3x\right)+\left(4x^2+12\right) \\
&= x^3+4x^2+3x+12
\end{aligned}$$

Produit de trois polynômes :

Le produit de trois polynômes peut être calculé en deux étapes : Nous pouvons calculer le produit des deux premiers polynômes; ensuite, nous multiplions le résultat trouvé par le troisième polynôme pour avoir le produit final.

Exemple : $P(x)\cdot Q(x)\cdot R(x)=\left[P(x)\cdot Q(x)\right]\cdot R(x)$

$$=P(x)\cdot\left[Q(x)\cdot R(x)\right].$$

Produit de deux binômes :

Nous pouvons utiliser une méthode très simple pour calculer le produit de deux binômes. Comme exemple, considérons le produit des deux binômes suivants : $(2x+3)(x+5)$. En utilisant la distributivité, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(2x+3)(x-5) &= 2x(x-5)+3(x-5) \\
&= 2x\cdot x-2x\cdot 5+3\cdot x-3\cdot 5 \\
&= 2x^2-10x+3x-15 \\
&= 2x^2-7x-15
\end{aligned}$$

Les polynômes

En examinant les étapes de la multiplication, nous remarquons que :

- ($2x^2$) est le produit des deux premiers termes de chaque binôme, (2x et x) ;
- (-10x) premier terme du 1er binôme multiplié par le deuxième terme du 2ème binôme, (2x et -5) ;
- (+3x) deuxième terme du 1er binôme multiplié par le premier terme du 2ème binôme, (3 et x) ;
- (-15) les deuxièmes termes de chaque binôme multipliés entre eux, (3 et -5).

Cette méthode constitue la forme usuelle de multiplication entre deux binômes.

Factorisation :

Factoriser un polynôme, signifie, mettre ce polynôme en produit de facteurs, c'est-à-dire le décomposer en un produit de deux ou plusieurs facteurs de degré inférieur.

1. **Quelques règles de factorisation :**

forme factorisée	forme développée
$(x-y)(x+y)$	$= x^2 - y^2$
$(x+y)^2$	$= x^2 + 2xy + y^2$
$(x-y)^2$	$= x^2 - 2xy + y^2$
$(x+a)(x+b)$	$= x^2 + (a+b)x + ab$
$(x-a)(x-b)$	$= x^2 - (a+b)x + ab$
$(x+y)^3$	$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x-y)^3$	$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
$(x+a)(x^2 - ax + a^2)$	$= x^3 + a^3$
$(x-a)(x^2 + ax + a^2)$	$= x^3 - a^3$

Les formules de factorisation sont multiples mais celles-ci sont les plus courantes et par conséquent sont les plus utilisées.

Les polynômes

2. Factorisation :

Si un polynôme est exprimé sous la forme d'un produit de deux ou plusieurs polynômes de degrés inférieurs, alors chaque polynôme du produit est appelé un **facteur** du polynôme original. Le processus de factorisation est une importante opération en algèbre, parce que nous avons toujours besoin d'expressions simples pour une meilleure analyse des données.

3. Quelques méthodes de factorisation :

Chaque terme du polynôme contient généralement un **facteur commun**. La formule consiste à mettre ce terme en facteur et de trouver les facteurs par lesquels on doit multiplier ce facteur commun pour retrouver le terme d'origine.

Exemples : **(a)** $x^3 - 4x^2 + 3x$
(b) $3x^3 + 5x^2$

Solutions :

(a) Le facteur commun à tous les termes du polynôme $x^3 - 4x^2 + 3x$ est (x)

$$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3)$$

Comme $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$, alors,

$$x^3 + 4x^2 + 3x = x(x-3)(x-1)$$

(b) Dans **(b)** $3x^3 + 5x^2$, (x^2) est le facteur commun:

$$3x^3 + 5x^2 = x^2(3x+5)$$

Si un facteur commun apparaît dans chacun des termes du polynôme, mets en facteur ce facteur commun et réarrange la partie restante. Cette technique est très pratique pour la factorisation.

Exemple : Factorise $(2x+1)x^2 - 4(2x+1)$

Solution :

Le facteur commun dans chaque terme est (2x + 1). Ainsi,

$$\begin{aligned}(2x+1)x^2 - 4(2x+1) &= (2x+1)(x^2-4) \\ &= (2x + 1)(x + 2)(x - 2).\end{aligned}$$

Les polynômes

Autres exemples : **(a)** $4a^2 - 25$; **(b)** $64u^4 - 9u^2$ et **(c)** $(m+n)^2 - 16$

Solutions :

(a) $4a^2 - 25 = (2a)^2 - (5)^2 = (2a-5)(2a+5)$

(b) $64u^4 - 9v^2 = (8u^2)^2 - (3v)^2 = (8u^2 - 3v)(8u^2 + 3v)$

(c) $(m+n)^2 - 16 = (m+n)^2 - 4^2 = [(m+n)-4][(m+n)+4]$

$= (m+n-4)(m+n+4)$

<u>Factorisation utilisant le carré d'un binôme</u>

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

Exemples : **(a)** $x^2 + 6x + 9$; **(b)** $x^2 + 4xy + 4y^2$ et **(c)** $9x^2 - 30xy + 25y^2$

Solutions :

(a) 9 étant le carré de 3. 6x étant égal à 3x multiplié par 2, nous avons la formule

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3)$.

(b) $4y^2$ étant le carré de $2y$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = (x)^2 + 2x(2y) + (2y)^2 = (x+2y)(x+2y)$$

(c) Avec la formule des identités remarquables,

$$9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x)^2 - 30xy + (5y)^2$$
$$= (3x)^2 - 2(3x)(5y) + (5y)^2 = (3x-5y)(3x-5y)$$

Les polynômes

Activité 1

Problème : Détermine le type et le degré de chaque polynôme suivant :

(a) $x^2 - 5x + 3$

(b) $y - 2y^2 + \sqrt{6}y + 7$

(c) $3z^4 - 9z^2 + 4$

(d) 5^2

(e) $2xy^2 + 3$

(f) $x^3 + 5x^2y + 8$

(g) $12x^2y^3z + 27xy^5z^4 + 19x^4y^2z^2$

Problème : Trouve la somme et la différence de chaque paire de polynômes :

(a) $P(x) = x^2 - 4x + 2$, $Q(x) = 3x^2 + 5x - 1$

(b) $S(y) = \frac{1}{2}y^2 + 8y - 3$, $T(y) = \frac{1}{8}y^2 + \frac{3}{4}y - 7$

(c) $F(x) = 7x^4 - 9x^3 + 2x - 8$, $Q(x) = 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 1$

(d) $S(t) = 16t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{9}{8}$, $V(t) = \frac{5}{8}y + 5$

Problème : Trouve le produit de chaque paire de polynômes :

(a) $F(x) = x^2 + 4$, $G(x) = x - 6$

(b) $P(x) = x^2 + 3x - 5$, $Q(x) = x^2 + x + 1$

(c) $M = x^2 + xy$, $N = xy + y^2$

Problème : Trouve le produit des binômes suivants :

(a) $(2x + 1)(x - 3)$

(b) $(x + 4)(5x - 1)$

(c) $(x + 3y)(2x - y)$

(d) $(7x - 4y)(2x + 5y)$

Problème : Développe les expressions suivantes :

(a) $(x + 2y)^3$

(b) $(x + 3)(2x + 4)(3x + 5)$

(c) $(2a - 3b)^3$

(d) $(r^2 + 3s)^3$

(e) $\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)^2$

Les polynômes

Problème : Factorise les polynômes suivants :

(a) $4x^2 - 9$
(b) $x^2 - 7x + 12$
(c) $x^2 + 8x + 16$
(d) $(2a+b)^2 - 25$

Problème : Factorise les polynômes suivants :

(a) $y^2 + 2y - 15$
(b) $t^4 + t^3 - 20t^2$
(c) $r^5 - 9r^3$
(d) $x^2 + 2xy - 8y^2$

Problème : Factorise les polynômes suivants :

(a) $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$
(b) $x^2(x+3) - 4x - 12$
(c) $(x^2 - 4) + 3(x+2)$
(d) $9x^2 + 6x + 1$

Problème : Factorise les polynômes suivants :

(a) $x^3 - 27$
(b) $8y^3 + 1$
(c) $x^2 - 4x + 4 - 9y^2$
(d) $t^9 + 1$

Problème : Mets x en facteur dans les expressions suivantes et trouve la (ou les) solution(s) des équations suivantes :

1. $x^3 - x = 0$
2. $x^3 - 2x = 0$
3. $2x^3 - 3x^2 - 5x = 0$
4. $3x^5 + 4x^4 - 10x^3 = 0$
5. $x^3 - 9x^2 + 20x = 0$
6. $x^3 - 2x^2 - 35x = 0$

Problème : Construis une équation polynomiale avec les solutions indiquées ci-dessous.

12. x = 1, x = 2, ou x = 3
13. x = -3, x = 4, ou x = 6

Thème II : Les expressions algébriques, les polynômes et les fonctions

Leçon 5 : Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

Le sais-tu ?

Comment résoudre des problèmes de manière algébrique ?

L'algèbre ne se résume pas seulement à des calculs. Au-delà des calculs il faut, en algèbre, appliquer dans des situations pratiques des théories et des techniques pour résoudre des problèmes posés. En fait, les applications à la résolution des problèmes sont les parties les plus importantes de l'algèbre.

Il y a quelques étapes générales qui peuvent t'aider à résoudre des problèmes réels :

Étape 1 : Choisis une lettre pour représenter certaines quantités ou la solution d'un problème que tu cherches à trouver.

Étape 2 : Etablis des expressions en mettant en relation la lettre choisie et les autres données pour représenter les autres inconnues du problème.

Étape 3 : Etablis une égalité ou une inégalité pour relier ces expressions.

NB : Il est possible de représenter beaucoup de problèmes sous la forme d'une équation ou d'une inéquation.

Étape 4 : Résous l'équation ou l'inéquation en utilisant les techniques de l'algèbre que tu connais et qui sont simples à manipuler.

Étape 5 : Vérifie la ou les solution(s) pour voir si les résultats respectent les conditions du problème. Assure-toi aussi que tu as répondu aux questions qui sont posées dans le problème.

Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

Les étapes 1, 2 et 3 sont les plus difficiles à réaliser. Cela demande une transformation du langage littéraire du problème en expression(s) mathématique(s).

Par exemple :

"La somme de x et de y" se traduit par '' x + y''

" 3 fois la somme de p et de q" se traduit par ''3(p + q)''

"La somme de 3m et de 5" se traduit par ''3m + 5''

''Le double de m augmenté de 6 se traduit par '' 2m + 6''

"La somme de a et b est supérieure strictement à 10" se traduit par ''a + b > 10''

"La somme d'un nombre n et de douze est égale à deux fois ce nombre" se traduit par :
''n + 12 = 2n''

'' Le double d'un nombre est égal à ce nombre augmenté de 12'' se traduit par
'' 2n = n + 12''

Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

Résoudre un problème réel en utilisant une équation du premier degré :

Exemple 1 : Un vendeur a gagné 150 000 F de plus en commission au deuxième mois de travail qu'au premier mois. Pour le troisième mois, la commission est le double de celle du deuxième mois. La commission totale des trois mois est de 1 650 000 F. Quel est le montant de la commission que le vendeur a gagné au premier, au deuxième et le troisième mois ?

Solution :

Étape 1 : Supposons que x représente la commission du 1er mois.

Étape 2 : Alors (x + 150 000) est la commission du 2eme mois et 2(x + 150 000) est la commission du 3eme mois.

Étape 3 : On obtient l'équation : $x + (x + 150\,000) + 2(x + 150\,000) = 1\,650\,000$

Étape 4 : On résout cette équation :

$$4x + 450\,000 = 1\,650\,000$$
$$4x = 1\,200\,000$$
$$x = 300\,000$$

Étape 5 : Les commissions sont :

1er mois	300 000 F
2eme mois	300 000 F + 150 000 F = 450 000 F
3eme mois	2(300 000 F + 150 000 F) = 900 000 F
	Total : 1 650 000 F

Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

Résoudre un problème réel en utilisant une inéquation du premier degré :

Exemple 2 : Pour participer à une compétition, il faut avoir un certain âge. Le double de cet âge plus 3 ans doit être supérieur strictement à cet âge plus 18 ans. Quel âge doit-on avoir pour participer à la compétition ?

Solution :

Étape 1 : Considère que A représente cet âge.

Étape 2 : Alors le double de cet âge est égal à 2A. Le double de cet âge plus 3 ans est égal à $(2A + 3)$.

Étape 3 : La condition pour participer : “ Le double de cet âge plus 3 ans doit être supérieur à cet âge plus 18 ans”.

Ainsi tu obtiens l’inéquation : $2A + 3 > A + 18$

Étape 4 : Résous cette inéquation : $2A - A > 18 - 3$

$$A > 15$$

Étape 5 : Par conséquent, il faut être âgé de plus de 15 ans pour participer à la compétition.

Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

Exemple 3 : Lors d'un examen comportant quatre matières de même coefficient 1, une élève obtient les notes suivantes pour les trois premières matières 11, 17, et 14. S'il faut une moyenne de 15 au moins pour avoir la mention bien, quelle est la note minimale qu'elle doit avoir à la quatrième matière pour obtenir une mention bien ?

Solution :

Étape 1 : On considère que x est la note qu'elle doit avoir pour la quatrième matière.

Étape 2 : Alors la moyenne des quatre matières est de : $\frac{(11 + 17 + 14 + x)}{4}$.

Étape 3 : On obtient l'inéquation : $\frac{(11 + 17 + 14 + x)}{4} \geq 15$.

Étape 4 : On résout cette inéquation $11 + 17 + 14 + x \geq 60$

$$x + 42 \geq 60$$

$$x \geq 60 - 42$$

$$x \geq 18.$$

Étape 5 : Ainsi, l'élève doit avoir une note au moins égale à 18, ($x \geq 18$) dans la quatrième matière pour obtenir la mention bien à l'examen.

Résoudre un problème réel en utilisant une équation du second degré :

Exemple :

En ajoutant à un nombre neuf fois son inverse, on trouve 6. Quel est ce nombre ?

Solution :

Étape 1 :Considère que ce nombre est x.

Étape 2 : Alors l'inverse de ce nombre est $\frac{1}{x}$.

Étape 3 : Tu obtiens l'équation : $x + 9\left(\frac{1}{x}\right) = 6$.

Étape 4 : Résous cette équation : $x \times x + x \left(\frac{9}{x}\right) = 6x$

$$x^2 + 9 = 6x$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0.$$

Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

Étape 5 : Ainsi $x = 3$.

Vérification : $3 + 9\left(\frac{1}{3}\right) = 3 + 3$

$= 6.$

Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

Remarque : Lorsque le problème peut être traduit par une équation du second degré, nous pouvons passer par ces différentes étapes pour trouver les solutions.

Exemple :

La longueur d'un rectangle est plus grande de 8 cm que sa largeur. Sa surface est de 128 cm^2. Trouve sa longueur et sa largeur.

NB. On remarquera que $(x - 8)(x + 16) = x^2 + 8x - 128$

Solution :

Étape 1 : On considère que x représente la largeur en cm.

Étape 2 : Alors, la longueur est de (x + 8) cm.

Étape 3 : Comme la surface d'un rectangle est égale à la longueur multipliée par la largeur, nous avons l'équation :

$$x(x + 8) = 128$$
$$x^2 + 8x = 128$$

Étape 4 : On résout cette équation : $x^2 + 8x = 128$

C'est-à-dire $x^2 + 8x - 128 = 0$

$$(x - 8)(x + 16) = 0$$
$$x - 8 = 0 \text{ ou } x + 16 = 0$$
$$x = 8 \text{ ou } x = -16$$

Étape 5 : La largeur étant toujours un nombre positif, seul x = 8 sera considérée.

Largeur est 8 cm

Longueur est 8cm + 8cm = 16 cm

Vérification : Surface = (longueur)(largeur)

$= 16\text{cm} \times 8 \text{ cm}$

$= 128 \text{ cm}^2$

Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

Résoudre un problème réel en utilisant une inéquation du second degré :

Problème : La somme des carrés de deux nombres entiers positifs consécutifs est supérieure ou égale à 41. Trouve les deux plus petits nombres qui répondent à cette condition.

NB. On remarquera que $(x - 4)(x + 5) = x^2 + x - 20$

Étape 1 : Désigne par x est le premier nombre.

Étape 2 : Alors le second nombre sera x + 1.

Étape 3 : Tu obtiens l'inéquation : $x^2 + (x + 1)^2 \geq 41$

Étape 4 : Résous l'inéquation : $x^2 + (x + 1)^2 \geq 41$

$$x^2 + (x + 1)^2 \geq 41$$
$$x^2 + (x^2 + 2x + 1) \geq 41$$
$$2x^2 + 2x + 1 \geq 41$$
$$2x^2 + 2x + 1 - 41 \geq 0$$
$$2x^2 + 2x - 40 \geq 0$$
$$x^2 + x - 20 \geq 0$$
$$(x + 5)(x - 4) \geq 0$$

$x + 5 \geq 0$ signifie que $x \geq -5$ et $x - 4 \geq 0$ signifie que $x \geq 4$

D'où le tableau de signes qui suit :

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
Signe de (x-4)		-	|	-	0	+	
Signe de (x+5)		-	0	+	|	+	
Signe de (x-4)(x+5)		+	0	-	0	+	

L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $]-\infty, -5] \cup [4, +\infty[$

Étape 5 : Les solutions de cette inéquation sont les réels x tels que : $x \leq -5$ ou $x \geq 4$.

Comme les nombres doivent être positifs, nous allons éliminer $x \leq -5$ et retenir $x \geq 4$.

Ainsi les plus petits nombres entiers positifs et consécutifs sont 4 et 5.

Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

Etude de cas en physique :

Problème : Si un objet est propulsé en haut avec une vitesse initiale de 96 mètres/seconde à une hauteur initiale de 240 m, (la résistance de l'air est négligée dans ce cas ci). La hauteur (h) atteinte par l'objet en mètres est une fonction du temps (t) en secondes. Elle est représentée par $h(t) = -16t^2 + 96t + 240$.

Déterminer la hauteur atteinte par cet objet, 5 secondes après la propulsion.

Solution : En factorisant, tu obtiens :

$$\begin{aligned} h(t) &= -16t^2 + 96t + 240 \\ &= -16(t^2 - 6t - 15). \end{aligned}$$

Remplace (t) par (5) :

$$\begin{aligned} h(5) &= -16(5^2 - 6(5) - 15) \\ &= -16(25 - 30 - 15) \\ &= -16(-20) = 320 \end{aligned}$$

Ainsi, l’objet atteindra 320 mètres en hauteur 5 secondes après sa propulsion.

Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

Activité

1. La somme de deux nombres entiers impairs consécutifs est de 36. Quels sont ces nombres ?
2. Existe-t-il deux nombres entiers impairs consécutifs dont la somme est 32 ?
3. Un employé dans une usine de voitures gagne un salaire de 200 000 F par mois plus 40 000 F de commission pour chaque voiture vendue ; combien de voitures doit-il vendre dans le mois pour avoir un revenu mensuel de 400 000 F
4. La somme d'un nombre entier et du quadruple de son inverse est égale à 4. Trouver ce nombre.
5. Un objet est propulsé à partir du sol vers le haut avec une vitesse initiale de 64 mètres/seconde. La formule de la hauteur atteinte par cet objet au dessus du sol est : $h(t) = 64t – 16t^2$. (a) En combien de temps, cet objet peut-il atteindre une hauteur de 48 mètres ? (b) Après combien de temps rebondira t-il sur le sol ?
6. Un garçon peut conduire son vélo à une vitesse 4 fois supérieure que lorsqu'il marche. Lors d'un parcours de 2 heures de temps pour se rendre chez sa grand-mère, il pédale sur une distance de 12 km et marche 3 km. Quelle est la vitesse lors du parcours à vélo?
7. Si on soustrait 5 d'un nombre multiplié par 4, le résultat est le même que la somme de ce nombre plus 4. Trouver ce nombre.
8. Aby a 4 ans de plus que Daba. Dans10 ans, la somme de leurs âges sera 64. Quel est l'âge de Aby et de Daba ?
9. La somme de deux nombres entiers consécutifs est plus petite de 13 unités que le plus grand nombre multiplié par 5. Quels sont ces nombres entiers?
10. Le prix d'une moquette est proportionnel à sa surface. Si une moquette circulaire de 5 mètres de diamètre est vendue à 60.000 F, quel serait le prix d'une moquette de 9 mètres de diamètre ? [Aire du cercle = πr^2.]
11. La somme de deux nombres est égale à 3 et la différence de leurs carrés est de 4. Quels sont ces nombres ?

Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

12. Le bénéfice mensuel d'une boutique de chaussures est représenté par la formule $B = 12S – 0,04S^2 – 50$, si les ventes représentées par S sont inferieures à 250 paires de chaussures.
    (a) Quel est le bénéfice mensuel réalisé avec la vente de 160 paires de chaussures?
    (b) Combien de paires de chaussures doivent être vendues pour éviter une perte?
    (c) Combien de paires de chaussures doivent être vendues pour réaliser un bénéfice de 750.000 F ?
13. Vous devez clôturer un champ rectangulaire avec un grillage de 120 m. Sachant que vous devez laisser une porte de 2m et que l'aire du champ est de 600 m^2, trouve ses dimensions.
14. La somme de trois nombres est égale à 27. La somme des deux premiers nombres est de 14 alors que celle des deux derniers est égale à 21. Quels sont ces nombres ?
15. Un berger achète 6 vaches et paye le même montant pour acheter 14 chèvres. Si une vache coûte 120.000 F de plus que le prix d'une chèvre, combien coûtent une vache et une chèvre ?
16. Pour fabriquer un article, une société se rend compte que son bénéfice B (en millions de francs) est représenté par $B = (8 – n)^2 – 64$, avec n indiquant le nombre d'articles produits. Combien d'articles faut-il vendre pour réaliser un bénéfice ?
17. Un travailleur à la retraite a collecté 16.000.000 F qu'il veut investir. Il décide de mettre une partie de son argent dans un compte bloqué pendant un an à un taux d'intérêt de 14% et le reste dans un compte d'épargne simple à 12% d'intérêt. Si la somme totale retirée des intérêts obtenus de ses deux comptes pendant un an est estimé à 2.000.000 F, combien devrait-il mettre dans chaque compte d'épargne ?

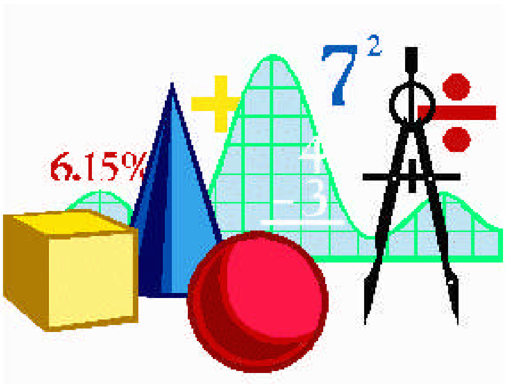
Applications : Résoudre des problèmes réels en algèbre

18. Demba a loué un voiture pour 24.000 F la journée plus 1100 F pour chaque kilomètre parcouru. Quelle distance doit-il parcourir dans la journée sachant qu'il ne dispose que de 45.000 F?
19. Le dénominateur d'une fraction moins un est le triple du numérateur. Si nous ajoutons10 au numérateur et 32 au dénominateur, la valeur de la fraction reste inchangée. Quelle est cette fraction ?
20. Les recettes d'une opération sont exprimées par la fonction : $h(x) = 5x^2 – 2x$ et les bénéfices par : $k(x)= x^2 + 3x – 7$; x représentant le nombre d'articles.

    Calcule le total des recettes et des bénéfices si 20 articles sont produits et vendus.

Niveaux
4^e et 3^e

2^{eme} partie :
Géométrie



Thème I : Introduction générale à la géométrie

Leçon 1 : Définitions et concepts de base

Le sais-tu?

Comprendre la géométrie est nécessaire pour quelqu'un qui veut savoir comment mesurer, concevoir et construire des objets physiques réels ou représentés. Mais aussi pour quelqu'un qui cherche à connaître comment les relations entre ces objets s`établissent et se justifient. En fait, le mot géométrie vient de la combinaison de deux termes : « géo » signifiant la terre et « métrie » signifiant mesurer.

La Géométrie est un excellent exemple de système de postulats, qui utilise la démarche scientifique pour poser d'abord des hypothèses, ensuite les confronter à l'expérimentation et/ou la pensée logique afin d'en tirer des relations de cohérence pouvant aboutir à des théorèmes.

Un postulat est une supposition de base, généralement, acceptée comme vraie sans preuve particulière.

Une proposition est une déclaration qui peut être prouvée comme vraie ou fausse.
Un théorème est une déclaration qui a été prouvée comme vraie.

Un bon géomètre doit savoir visualiser, illustrer, formuler, démontrer, utiliser des définitions fondamentales ou équivalentes et certains concepts importants comme « les termes abstraits » mais aussi les concepts d`angle, de triangle, de droites parallèles ou perpendiculaires, de propriété, d'équivalence, de caractéristiques, de théorème, de preuve, de raisonnement déductif, inductif et d'autres encore.

Définitions et concepts de base

Les termes abstraits : Ces mots sont si fondamentaux et basiques qu'ils ne peuvent pas être définis en utilisant d'autres mots plus simples. Cependant ils peuvent être décrits. Il s'agit du point, de la droite et du plan.

Un point : un point représente une position ; il n'a ni longueur, ni largeur, ni hauteur. Exemple : Un point A peut être représenté comme il suit, la seconde notation étant plus acceptée.

1) ● A

ou

2) × A

Une droite : une droite est une suite continue de points, sans espace entre eux, se prolongeant de part et d'autre vers l'infini.
(Un fil bien tendu donne une image de ce qu'est une droite)

Exemple :

Notation : (AB)

Un plan : un plan est un ensemble de points représentant une surface plate qui s'étend à l'infini dans toutes les directions.

Exemple : La figure suivante est une représentation d'un plan.

Définitions et concepts de base

Une bonne définition doit être grammaticalement correcte et donner tous les caractères ou propriétés nécessaires pour identifier clairement le terme ou concept à définir. Voici quelques définitions fondamentales en géométrie.

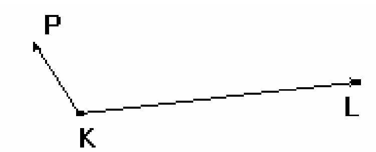
Un segment : C'est une partie d'une droite limitée par deux points particuliers appelés extrémités entre lesquels se trouvent tous les autres points.

Exemple :

Notation : [AB]

Un vecteur (un représentant de vecteur) : C'est un segment orienté avec un point de départ appelé ''origine du vecteur'' et un point d'arrivée appelé ''extrémité du vecteur''.

Exemples :



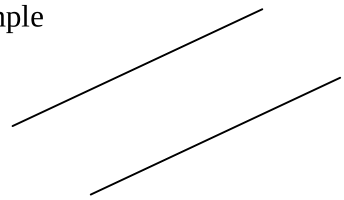
Notations : $\overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{KP}$

La droite (KL) est appelée support du vecteur $\overrightarrow{KL}$;
La longueur du segment [KL] est appelée longueur ou norme du vecteur $\overrightarrow{KL}$.

Le sens de K vers L est appelé sens du vecteur $\overrightarrow{KL}$.

Droites parallèles : Deux droites (distinctes) sont parallèles, si étant situées dans un même plan et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, elles ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

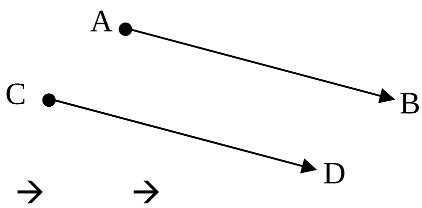
Exemple



Vecteurs égaux : Deux vecteurs sont égaux si :

- les droites qui les portent sont parallèles
- ils ont la même longueur
- ils ont le même sens

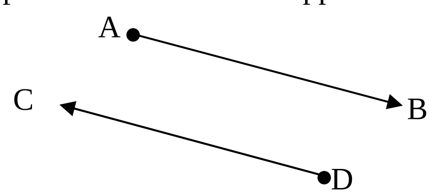
Exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux



Vecteurs opposés : Deux vecteurs sont dits opposés si :

- les droites qui les portent sont parallèles
- ils ont la même longueur
- ils sont de sens opposés

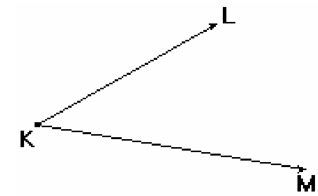
Exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont opposés



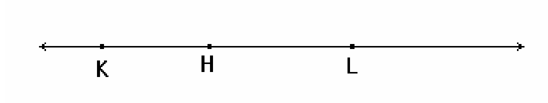
Définitions et concepts de base

Un Angle : Deux vecteurs non nuls ayant même origine et forment un angle. Cette origine commune est appelée sommet de l'angle.
Les droites portant les vecteurs sont les côtés de l'angle.

Cet angle est appelé, angle $\widehat{LKM}$ ou $\widehat{MKL}$
(Le sommet est toujours la lettre occupant le milieu)



Points alignés : Ce sont des points appartenant à la même droite.



Exemple : H, K, L sont alignés.

Vecteurs colinéaires : Deux vecteurs portés par la même droite sont dits vecteurs colinéaires.
De même deux vecteurs de supports parallèles sont dits vecteurs colinéaires.

Exemples : les vecteurs $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{KN}$ de la figure 1 sont colinéaires de même que les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{BC}$ de la figure 2

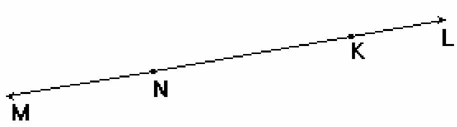


Figure 1

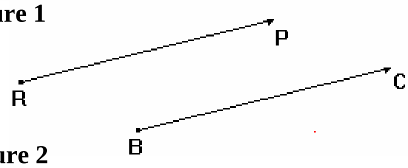
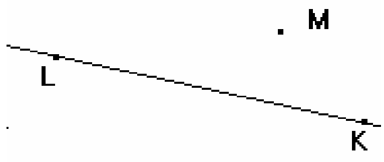


Figure 2

Vecteurs non colinéaires : Deux vecteurs portés par des droites qui ne sont pas parallèles sont dits vecteurs non colinéaires.

Points non alignés : Des points non alignés sont des points n'appartenant pas à la même droite.

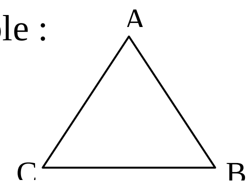


Exemple : K, L, et M sont non alignés.

Les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont non colinéaires.

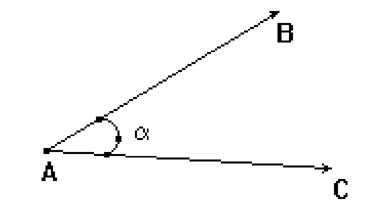
Triangle : Un triangle est une figure géométrique à trois côtés. Il est formé par les segments reliant trois points non alignés.
Ces segments (ou leurs supports) sont appelés cotés du triangle

Exemple :



Définitions et concepts de base

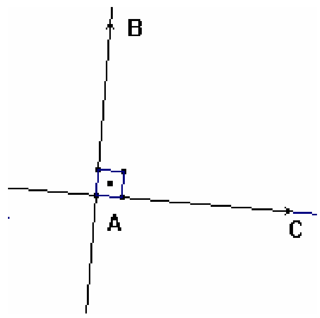
Les Propriétés d'un angle

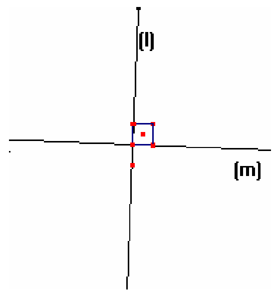


Soit l'angle $\widehat{BAC}$.
Les points situés entre les deux côtés de l'angle sont appelés ***points intérieurs*** (ou secteur saillant) tandis que les points du plan en dehors du secteur saillant sont les ***points extérieurs*** (ou secteur rentrant) de l'angle.
L'écart entre les deux côtés est ***la mesure intérieure***, alors que celle obtenue de par les points extérieurs est ***la mesure extérieure*** de l'angle. La somme de ces deux mesures donne 360 degrés (360°).

L'Angle droit : Un angle droit est un angle mesurant 90 degrés.
On obtient quatre angles droits avec deux droites perpendiculaires.

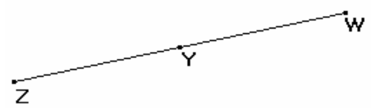
Exemple : L'angle BAC mesure 90°, donc c'est un angle droit.



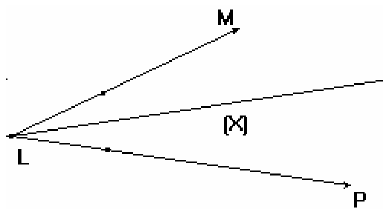


Droites perpendiculaires :
Deux droites *(l) et* (*m*) sont perpendiculaires lorsqu'elles forment un angle droit.

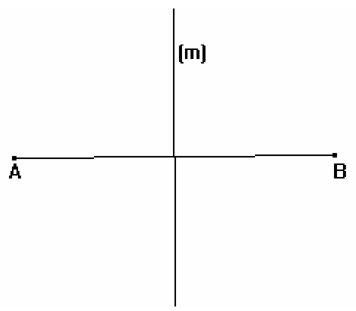
Milieu d'un segment : C'est le point qui divise un segment en deux segments de même longueur.
Si Y est sur le segment [ZW] et si ZY = YW alors Y est le milieu de [ZW]



Bissectrice :
Une droite qui divise un angle en deux angles de même mesure est appelée bissectrice de cet angle.
Exemple : La droite (X) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MLP}$



Médiatrice : Une droite qui passe par le milieu d'un segment et qui est perpendiculaire au support de ce segment est appelée médiatrice de ce segment.



Instruments de mesure :

Segment : Un segment se mesure en utilisant une règle graduée. Le résultat s'exprime, souvent, en mètres ou centimètres.

Définitions et concepts de base

Angle : Pour mesurer un angle on utilise un instrument appelé rapporteur. La mesure se fait toujours du côté des points intérieurs de l'angle. Le résultat s'exprime en degrés ou grades.

Deux figures géométriques ayant les mêmes mesures et la même forme sont dites superposables.

Exemples de Postulat / Axiome : C'est une supposition de base, généralement, acceptée comme vraie sans preuve particulière.
Exemples :

Postulat 1 : Par deux points distincts du plan ne passe qu'une droite et une seule.
Postulat 2 : Trois points distincts non alignés définissent un plan unique.

Raisonnement inductif : C'est une méthode de raisonnement consistant à tirer des conclusions à partir d'observations de plusieurs situations particulières afin d'identifier des modèles qui seront utilisés pour expliquer d'autres situations de schémas semblables.

Raisonnement déductif : Cette méthode de raisonnement utilise des règles générales ou théorèmes établis pour trouver des solutions à des problèmes particuliers de natures diverses.

Prouver : C'est un processus comportant un nombre fini d'étapes telles que le passage d'une étape à l'autre se fait en donnant une raison valide afin d'aboutir à une conclusion qui résout le problème posé.

La structure du test "Si … , alors …": Cette structure est conçue pour tester une série de conditions afin de choisir une action particulière ou une conclusion par voie de la relation de cause à effet.

Exemple : Si deux droites parallèles ont un point commun alors, elles sont confondues.

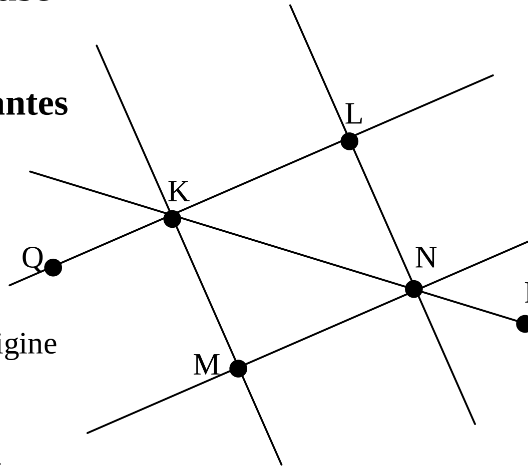
Définitions et concepts de base

Activités

Utilise la figure pour répondre aux questions suivantes

Informations sur la figure

- les droites (KM) et (LN) sont parallèles ;
- les droites (KL) et (MN) sont perpendiculaires à (KM);



1. Nomme les quatre vecteurs ayant le point K comme origine
   ______ ______ ______ ______
2. Nomme trois points alignés _______ ________ _______
3. Nomme trois points non alignés _______ _______ ______
4. Nomme quatre angles ______ ______ _______ ________
5. Nomme deux droites ________ ______
6. Nomme deux segments de droite _______ ______
7. Nomme deux triangles ______ _______
8. Y a t'il un point d'origine pour le vecteur $\overrightarrow{NL}$? ______Si oui, lequel ? ______
9. Cite deux droites parallèles différentes de celles qui sont données dans les informations sur la figure _________ _________
10. Cite deux droites perpendiculaires différentes de celles qui sont données dans les informations sur la figure _______ _______
11. Cite quatre segments égaux ? ________ _________
12. Cite trois droites égales ? ________ _________
13. Cite deux angles droits ? _______ _________
14. Cite deux angles égaux qui ne sont pas des angles droits ? ________ ________
15. Quel est le troisième côté du triangle ayant [KL] et [KP] comme cotés _____ _______
16. Quels sont les trois angles du triangle ayant [KM] et [KN] comme cotés
    _____ _____ _____

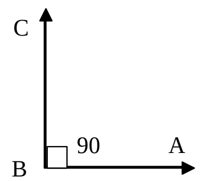
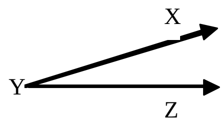
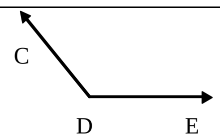
Thème I : Introduction générale à la géométrie

Leçon 2 : Classification des angles, triangles, quadrilatères, et Polygones

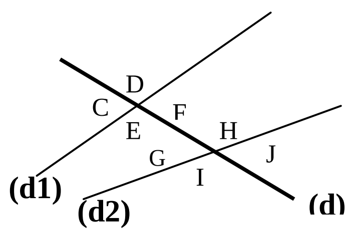
Le sais-tu?

Les figures géométriques sont identifiables de par leurs formes et leurs mesures. Nous étudions dans cette leçon les propriétés des angles, triangles, quadrilatères, et polygones.

La classification des angles

	**Un angle droit** mesure exactement 90° et est formé de 2 droites perpendiculaires
	**Un angle aigu** mesure moins de 90°
	Un angle plat mesure 180°
	**Un angle obtus** mesure plus de 90° mais moins qu'un angle plat ;

Les angles intérieurs et les angles extérieurs

	Une droite (d) est sécante à deux autres droites (voir figure) . $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{I}$ et $\hat{J}$ sont des angles extérieurs $\hat{E}$, $\hat{G}$, $\hat{F}$ et $\hat{H}$ sont des angles extérieurs $\hat{J}$ et $\hat{F}$ sont des angles correspondants $\hat{J}$ et $\hat{C}$ sont des angles alternes externes $\hat{G}$ et $\hat{F}$ sont des angles alternes internes

Classification des angles, triangles, quadrilatères, et polygones

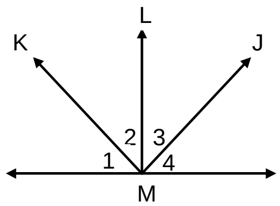


Figure A

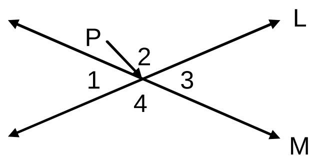


Figure B

Deux angles sont dits **complémentaires** si la somme de leurs mesures est égale à 90°.
Sur la figure A, les angles 1 et 2 sont complémentaires de même que les angles 3 et 4.

Deux angles sont **supplémentaires** si la somme de leurs mesures est égale à 180°.
Sur la figure B, les angles 2 et 3 sont supplémentaires, de même que 4 et 3.
Quels sont les autres angles supplémentaires sur cette même figure B ?

Deux angles sont dits **adjacents** s'ils ont :

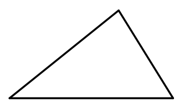
- un sommet commun
- un côté commun
- et si de plus ils sont situés de part et d'autre du côté commun.

Sur la figure A, les angles 2 et 3 sont adjacents. Pouvez-vous trouver les autres sur A et B ?

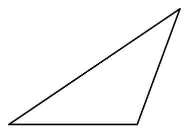
Deux angles sont dits **opposés** par le sommet s'ils ont le même sommet formé par deux droites sécantes supports de leurs cotés.
Sur la figure B, les angles 1 et 3 sont opposés par le sommet de même que les angles 2 et 4.

La classification des triangles

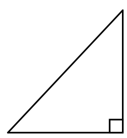
Elle peut être basée sur la mesure des angles, ainsi on a : Les triangles aigus, obtus et droit.
Un triangle aigu a 3 angles aigus.



Un triangle obtus a 1 angle obtus.



Un triangle rectangle a 1 angle droit.



Classification des angles, triangles, quadrilatères, et polygones

Elle peut se faire aussi en fonction du nombre de côtés ayant la même mesure de longueur, ainsi on a : Les triangles isocèles, équilatéraux et quelconques (scalène).

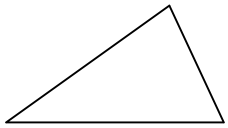
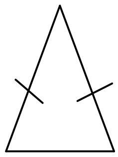
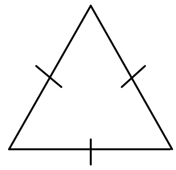
		

Figure A	**Figure B**	**Figure C**

Un triangle quelconque (ou triangle scalène) est un triangle qui n'a pas de côtés de même mesure (ni d'angles de même mesure). Voir la figure A.

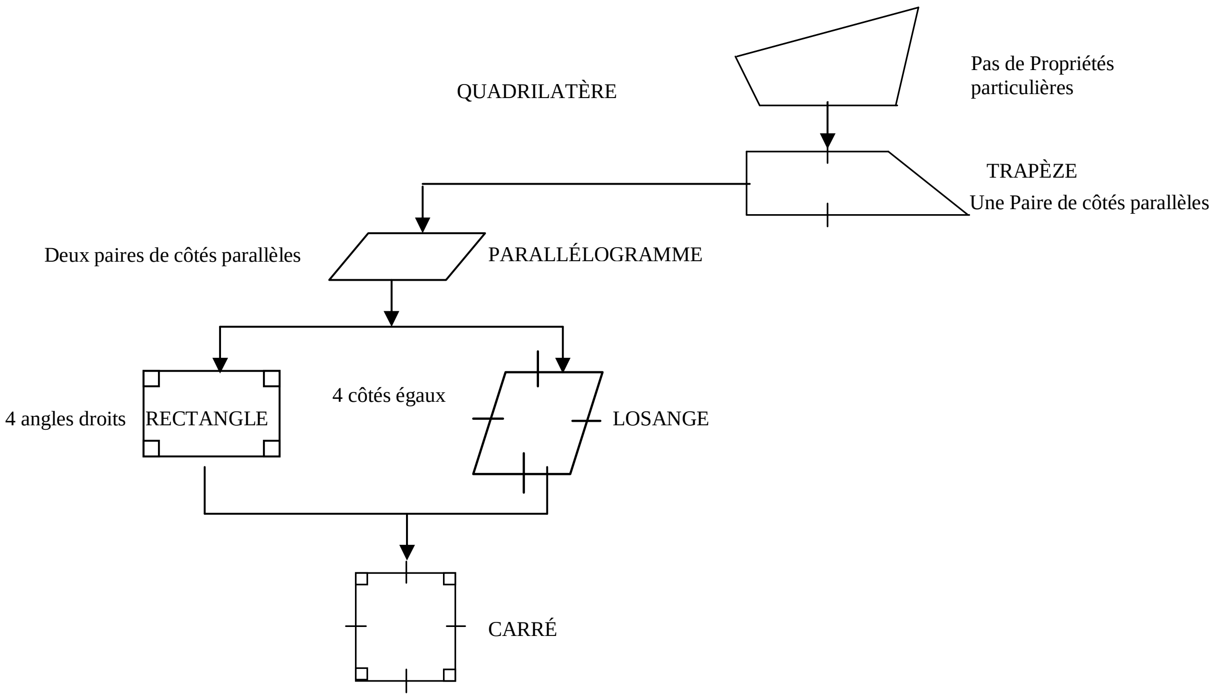
Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés égaux en longueur (et deux angles de même mesure). Voir la figure B.

Un triangle équilatéral est un triangle avec trois côtés de même longueur (et trois angles de même mesure égale à 60 degrés). Voir la figure C.

La classification des quadrilatères

Un quadrilatère est une figure géométrique qui a quatre côtés. Les relations entre les côtés et les angles seront étudiées.

Organigramme des quadrilatères



Classification des angles, triangles, quadrilatères, et polygones

Les propriétés des parallélogrammes

Définitions de parallélogrammes particuliers

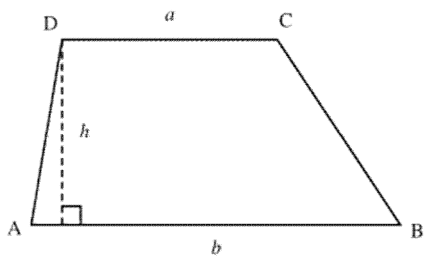
- Un **rectangle** est un parallélogramme qui a un angle droit.
- Un **losange** est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux.
- Un **carré** est un parallélogramme qui est à la fois un rectangle et un losange ; ses quatre angles sont droits et ses côtés sont égaux.

Propriétés d'un parallélogramme

- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- Le point d'intersection de ses diagonales est son centre de symétrie.
- Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.
- Les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure.
- Les angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.
- Les aires des quatre triangles formés par ses diagonales sont égales

Les propriétés des trapèzes

Définition :
Un **trapèze** est un quadrilatère, possédant deux côtés opposés parallèles. Ces deux côtés parallèles sont appelés *petite base* et *grande base*. Un trapèze possède deux paires d'angles consécutifs de somme égale à 180 degrés.



Cas particuliers:

Un trapèze est dit **rectangle** s'il possède un angle droit.

Un trapèze est qualifié d'**isocèle** lorsqu'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- Les deux angles adjacents à une même base sont égaux.
- Deux côtés opposés sont de même longueur.
- Les deux bases du trapèze ont la même médiatrice, et celle-ci est un axe de symétrie du trapèze.

Classification des angles, triangles, quadrilatères, et polygones

Tableau de propriétés des Diagonales de Quadrilatères particuliers

Quadrilatères Particuliers	Les diagonales sont toujours		Les diagonales	
	Egales	Perpendiculaires	se coupent en leur milieu	sont bissectrices des angles au sommet
Parallélogramme	Non	Non	Oui	Non
Rectangle	Oui	Non	Oui	Non
Losange	Non	Oui	Oui	Oui
Carré	Oui	Oui	Oui	Oui
Trapèze	Non	Non	Non	Non
Trapèze isocèle	Oui	Non	Non	Non

La classification des polygones

Les polygones peuvent être classés entre eux suivant leur nombre de côtés, c'est-à-dire leur ordre.
Le polygone le plus élémentaire est le triangle : un polygone possède au moins trois sommets et trois côtés:

Tableau de quelques polygones :

Nom du polygone	Nombre de côtés
Triangle	3
Quadrilatère	4
Pentagone	5
Hexagone	6
Octogone	8
Décagone	10
Dodécagone	12

Le segment qui joint une paire de sommets non adjacents dans un polygone est appelé une diagonale. Voir Figure A.

Classification des angles, triangles, quadrilatères, et polygones

Les diagonales du pentagone ABCDE sont :
[AC], [BD], [EC], [EB] et [AD]
Il y a une relation entre le nombre de côtés et le nombre de diagonales

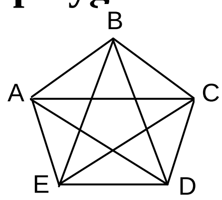
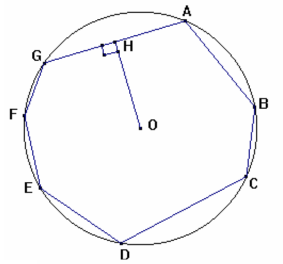


Figure A

Si un polygone a N côtés, alors le nombre total des diagonales pouvant être tracées est égal à $\frac{1}{2}N(N-3)$.

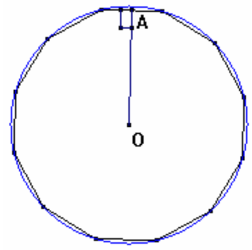
Notion d'angle au centre

Un ***apothème*** d'un polygone inscriptible relativement à un de ses côtés est le segment joignant le centre du polygone au pied de la perpendiculaire issue du centre à ce coté.



Si le polygone est régulier, les apothèmes sont :

- les médiatrices des cotés du polygone ;
- les demi médianes du polygone, s'il est d'ordre pair ;
- des rayons du cercle inscrit dans le polygone.



Les ***rayons*** d'un polygone inscrit relient ses sommets à son centre.

Si le polygone est régulier, ce sont aussi :

- les demi diamètres du polygone, s'il est d'ordre pair ;
- des rayons du cercle circonscrit au polygone.

On appelle **angle au centre** du polygone l'angle formé par deux rayons consécutifs de ce polygone.

Si le polygone considéré est régulier, les *n* angles au centre ont tous la même mesure, $\frac{2\pi}{n}$ radians, et c'est aussi la mesure de l'angle entre deux apothèmes consécutifs.

La somme des angles d'un polygone ne porte pas de nom particulier, mais vaut (**seulement** dans le cas d'un polygone **convexe**) :

Classification des angles, triangles, quadrilatères, et polygones

S = (n – 2) ×180° ou **S = (n – 2) ×π radians**, où n est le nombre de côtés du polygone.

À noter que lorsque l'ordre d'un polygone augmente d'une unité, la somme de ses angles augmente de 180° ou π radians.
Par contre la somme des angles au centre est toujours égale à 360°.

Pour trouver les mesures des angles au centre d'un polygone étant donné n le nombre de côtés, on utilise la relation suivante :

$$\textbf{Angle au centre} = \frac{360°}{n}$$

La mesure des angles intérieurs ou angle du polygone régulier est donnée par la relation :

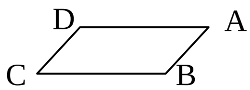
$$\textbf{Angle intérieur} = 180 - \textbf{angle au centre}$$

Classification des angles, triangles, quadrilatères, et polygones

Activité 1

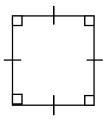
1. Un polygone à 4 côtés est appelé _________; et la somme de ses angles donne _________.

2. Un polygone à 3 côtés est _________; et la somme de ses angles donne _________.

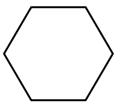
3. 

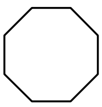
_________ Quels sont les côtés opposés et égaux

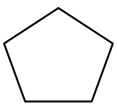
Nomme les figures suivantes

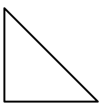
4.  _________ - un parallélogramme qui a 4 côtés égaux et 4 angles droits

5.  _________ - un parallélogramme qui a 4 angles droits

6.  _________ - un polygone avec 6 côtés

7.  _________ - un polygone avec 8 côtés

8.  _________ - un polygone avec 5 côtés

9.  _________ - un polygone avec 3 côtés

Classification des angles, triangles, quadrilatères, et polygones

Sur la Figure A,

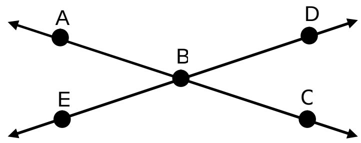


Figure A

10. Cite deux angles adjacents.

_________ _________

11. Cite deux angles opposés par le sommet.

_________ _________

12. Cite deux angles supplémentaires

_________ _________

13. Nomme un angle plat.

____

Sur la Figure B,

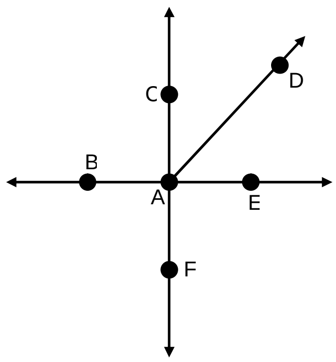


Figure B

14. Nomme un angle droit.

____

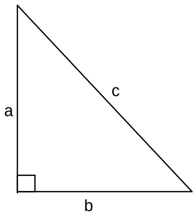
15. Cite deux angles complémentaires

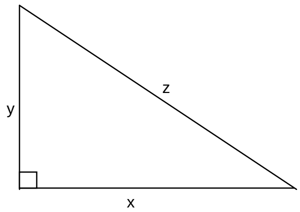
_________ _________

Thème I: Introduction générale à la géométrie

Leçon 3 : Le triangle rectangle

Un triangle est dit rectangle quand il a un angle droit mesurant 90˚. Les propriétés du triangle rectangle sont très utiles pour résoudre des problèmes de mathématiques et de la vie courante. Dans cette leçon nous étudierons ces propriétés.



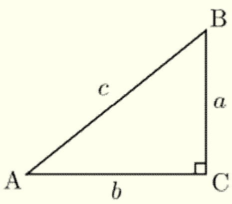


Sur les figures ci-dessus, *b* et *x* sont appelés les *bases*, *a* et *y* sont les *hauteurs* alors que *c* et *z* sont appelés les *hypoténuses*.

Le théorème de Pythagore

La forme la plus connue du théorème de Pythagore est la suivante :

« Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. »



Dans un triangle ABC rectangle en C, AB étant l'hypoténuse, où AB = c, AC = b et BC = a (voir figure ci-dessus), on aura donc :

$BC^2 + AC^2 = AB^2$ ou encore : $a^2 + b^2 = c^2$

Le triangle rectangle

Le théorème de Pythagore permet ainsi de calculer la longueur d'un des côtés d'un triangle rectangle si l'on connaît les deux autres.

Exemple : avec les notations ci-dessus, soit le triangle rectangle de côtés a = 3 et b = 4; alors la longueur du troisième côté, c, est donnée par: $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = c^2$ d'où c = 5.

Ce théorème est nommé ainsi d'après Pythagore de Samos qui était un mathématicien, philosophe et astronome de la Grèce antique. Ce théorème était déjà connu des égyptiens qui l'utilisaient pour déterminer des surfaces de terres inondées par les crues du fleuve le Nil.

Un triplet de nombres entiers tel que (3, 4, 5), représentant la longueur des côtés d'un triangle rectangle s'appelle **un triplet pythagoricien**. De même que tout triplet obtenu en multipliant, chaque nombre d'un autre triplet déjà connu, par un nombre entier.

Exemple :

(6, 8, 10) = (2x3, 2x4, 2x5)

Le tableau suivant donne d'autres exemples de triplets pythagoriciens.

Triplet Pythagoricien	Multiple du triplet Pythagoricien	Facteur Multiplicateur
(3, 4, 5)	(15, 20, 25)	5
(5, 12, 13)	(10, 24, 26)	2
(8, 15, 17)	(80, 150, 170)	10

Il est conseillé de mémoriser, au moins, les triplets suivant : (3, 4, 5), (5, 12, 13), et (8, 15, 17) d'autant plus que cela facilite la résolution de certains problèmes de géométrie par identification, rapide, d'autres triplets plus complexes mais qui ne sont, en fait, que leurs multiples, s'exprimant sous la forme suivante :

(3n, 4n, 5n) (5n, 12n, 13n) (8n, 15n, 17n)

Où n est un nombre entier positif (n = 1, 2, 3,. . .).

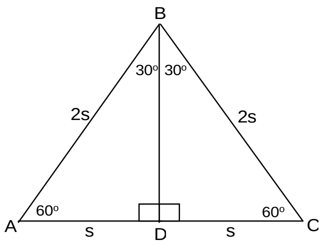
La réciproque du théorème de Pythagore

« Si dans un triangle, le carré du côté le plus long est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle. L'angle droit est l'angle opposé au côté le plus long. Ce côté le plus long est l'hypoténuse. »

Le triangle rectangle

Le triangle rectangle 30-60˚

Supposons que la longueur de chaque côté du triangle équilatéral sur la Figure A mesure 2s. La bissectrice de l'angle au sommet B crée de nouvelles relations intéressantes:



Fiaure A

Le triangle ABD est appelé triangle rectangle 30-60˚ (ou demi triangle équilatéral) à cause de la mesure de ses angles aigus:

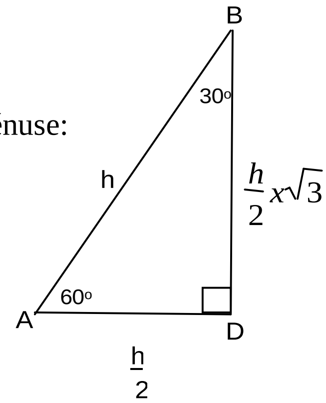


Figure B

La règle des 30-60˚

- La longueur de la base est la moitié de celle de l'hypoténuse:

$$\mathrm{AD} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$$

- La longueur de la hauteur est la moitié de l'hypoténuse multipliée par $\sqrt{3}$:

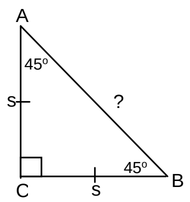
$$\mathrm{BD} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \sqrt{3}$$

- La longueur de la hauteur est aussi égale à celle de la base multipliée par $\sqrt{3}$:

$$\mathrm{BD} = \mathrm{AD} \times \sqrt{3}$$

Le triangle rectangle 45-45°, demi carré ou triangle rectangle isocèle

Un autre triangle rectangle particulier est le triangle isocèle rectangle. Puisque deux de ses côtés sont égaux, les angles opposés le sont aussi. Cela implique que leurs mesures est de 45˚ chacun.

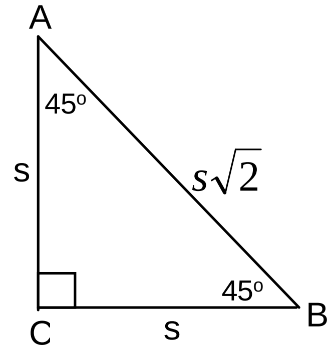


Fiaure C

Soit s la longueur de chaque côté du triangle ci-dessus (Voir Figure C).

Le triangle rectangle

La règle des 45-45°



- La longueur de la base est égale à celle de la hauteur:

$$AC = BC$$

- La longueur de l'hypoténuse est égale à celle de la base ou de la hauteur multipliée par $\sqrt{2}$:

$$AB = AC \times \sqrt{2}$$
$$= BC \times \sqrt{2}$$

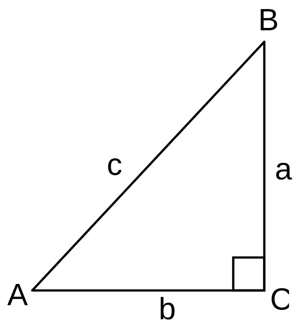
- La longueur de la base ou de la hauteur est égale à la moitié de celle de hypoténuse multipliée par $\sqrt{2}$:

Figure D

$$BC = AC = \frac{1}{2} AB \times \sqrt{2}$$

Formules trigonométriques :

Un rapport trigonométrique d'un angle aigu dans un triangle rectangle est le rapport de la longueur de deux côtés du triangle rectangle. Ainsi il y a trois rapports trigonométriques nommés : sinus, cosinus et tangente



$$\text{Sinus de } \hat{A} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \hat{A}}{\text{l'hypothénuse}} = \frac{BC}{AB}$$

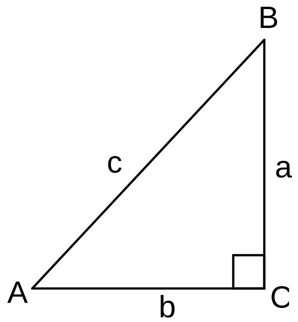
$$\text{Cosinus de } \hat{A} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{A}}{\text{l'hypothénuse}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{Tangente de } \hat{A} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \hat{A}}{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{A}} = \frac{BC}{AC}$$

Il est important de pouvoir se rappeler la définition de ces termes trigonométriques.

En plus de ces rapports trigonométriques, il y a en d'autres, qui méritent d'être connus. Ils s'agit de : cotangente (cotg), sécante (sec) et cosécante (cosec) :

Le triangle rectangle



$$\text{Cosécante de } \hat{A} = \frac{\text{l'hypothénuse}}{\text{côté opposé à l'angle } \hat{A}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{Sécante de } \hat{A} = \frac{\text{l'hypothénuse}}{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{A}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Cotangente de } \hat{A} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{A}}{\text{côté opposé à l'angle } \hat{A}} = \frac{AC}{BC}$$

Utilisation des rapports ou fonctions trigonométriques

Les relations suivantes sont importantes à connaître :

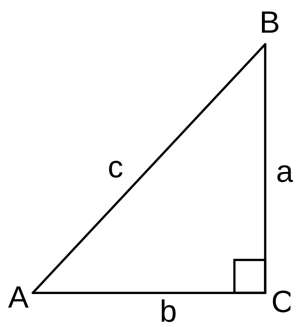
Notation : Sinus, cosinus, et tangente sont respectivement représentés par les abréviations: sin, cos,
et tg ou (tan)

- La règle s'applique à n'importe lequel des angles aigus du triangle rectangle.

$\sin \hat{A} = \frac{a}{c}$ $\sin \hat{B} = \frac{b}{c}$

$\cos \hat{A} = \frac{b}{c}$ $\cos \hat{B} = \frac{a}{c}$

$\text{tg } \hat{A} = \frac{a}{b}$ $\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{a}$

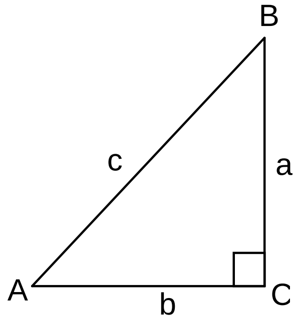


Soit **a** la longueur du côté opposé <u>à</u> l'angle $\hat{A}$, **b** celle du côté adjacent et **c** celle de l'hypoténuse. On a alors les rapports suivants :

$\text{cotg } \hat{A} = \frac{b}{a}$

$\sec \hat{A} = \frac{c}{b}$

$\text{cosec } \hat{A} = \frac{c}{a}$



Le triangle rectangle

- Puisque la valeur de $\sin \hat{A}$ et $\cos \hat{B}$ est égale à $\frac{a}{c}$, on peut dire qu'ils sont donc égaux.
- De même, $\cos \hat{A}$ et $\sin \hat{B}$ sont égaux puisque leur valeur est $\frac{b}{c}$.
- Lorsque les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont complémentaires, $\sin \hat{A} = \cos \hat{B}$ et $\cos \hat{A} = \sin \hat{B}$
  Exemple : $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$.

Soit **c** l'hypoténuse, b la base et **a** la hauteur de n'importe quel triangle rectangle.

L'aire est toujours égale à : $\frac{a \times b}{2}$ (base multipliée par hauteur divisée par 2).

Le **Périmètre =** a + b + c (base plus hauteur plus hypoténuse).

Le triangle rectangle

Exercices : 1

1. Soit le triangle rectangle ABC en $\hat{C}$. Si AC = 4 et BC = 3,
   a. Quelles sont alors les valeurs de tg A, sin A, et cos A.
   b. En utilisant le théorème de Pythagore, trouver la longueur de l'hypoténuse.
   c. Quelle est l'aire du triangle ?
   d. Trouver les trois relations trigonométriques de l'angle $\hat{A}$
   e. Quel est le périmètre du triangle ?

2. Exprimer les valeurs de sin 60°, cos 60° et la tg 60° en valeur entière ou décimale.

3. Lister six (6) triplets pythagoriciens différents.

4. Sur le triangle 30-60˚ ABC, si la base b = 4, trouver les valeurs de

   a = ---- et de c = ----

5. Sur le triangle rectangle 45-45˚ ABC, si la base b = 6, trouver les valeurs de
   a = ______ et de c = ______

6. Quelle est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle 45 – 45˚ dont les côtés sont égaux et mesurent 5 unités.

Thème I: Introduction générale à la géométrie

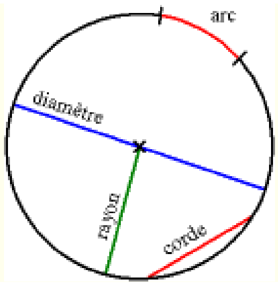
Leçon 4 : Cercles, mesure d'angles et concepts associés

Le sais-tu?

Le cercle occupe une place très importante en géométrie et dans la vie courante. En effet, la forme circulaire comme la roue est présente partout. Le cercle a des propriétés intéressantes que nous étudierons au cours de cette leçon.

Définitions de quelques termes:

- Un **cercle** est une courbe plane, constituée des points situés à égale distance d'un point nommé **centre.**
- On appelle **corde** un segment de droite dont les extrémités se trouvent sur le cercle.
- Un **arc** est une portion de cercle délimitée par deux points.
- On appelle **rayon** un segment de droite joignant le centre du cercle à un point du cercle. La longueur *r* d'un rayon est aussi appelée rayon du cercle.
- Un **diamètre** est une corde passant par le centre ; c'est un segment de droite qui partage le disque en deux parties d'aires égales. Sa longueur égale à **2r** est aussi appelé diamètre, r étant le rayon du cercle.



- Un **demi-cercle** est un arc dont les extrémités se situent à l'intersection d'un diamètre et du cercle.
- Un arc plus long que le demi-cercle est un arc majeur (grand arc).
- Un arc plus petit que le demi-cercle est un arc mineur (petit arc).
- On appelle **circonférence** ou périmètre du cercle la longueur du cercle.
- L'intérieur du cercle est l'ensemble des points du plan dont la distance au centre est strictement inférieure au rayon du cercle.
- L'extérieur du cercle est l'ensemble des points du plan dont la distance au centre est strictement supérieure au rayon.

Cercles, mesure d’angles et concepts associés

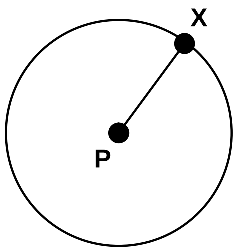


Figure 1

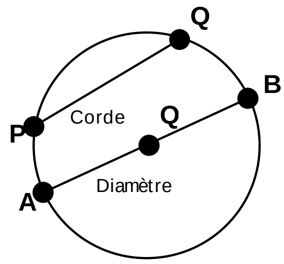


Figure 2

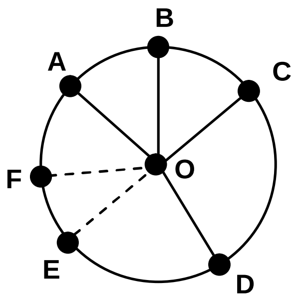


Figure 3

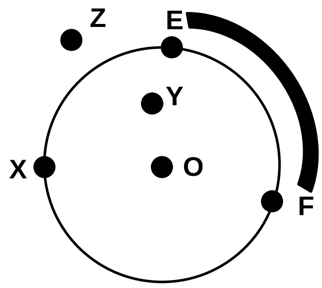


Figure 4

Exemples : Dans les figures 1, 2, 3 et 4 on peut remarquer des exemples de quatre différents aspects du cercle.

Exemples :

- Dans la figure 1, P est le centre du cercle.
- Dans la figure 1, X est un point sur le cercle.
- Dans la figure 1, le segment de droite [PX] est un <u>rayon</u> du cercle.
- Dans la figure 1, la <u>circonférence</u> du cercle est la longueur du pourtour du cercle,

- Dans la figure 2 , le segment de droite [AB] est un <u>diamètre</u> du cercle.
- Dans la figure 2, le segment [PQ] est une <u>corde</u>.
- Dans la figure 2, chacune des parties du cercle comprise entre A à B est un <u>demi-cercle</u>.

- Dans la figure 3, la partie du cercle comprise entre A à B est un <u>arc</u>.
- Dans la figure 3, l’arc allant du point A au point C (en passant par B) constitue un petit arc (<u>arc mineur)</u>
- Dans la figure 3, du point A au point E, en passant par les points B, C, et D, constitue un grand arc (<u>arc majeur) noté</u>
- Dans la figure 3, les segments de droite [OA] et [OB] sont des <u>rayons.</u>

- Dans la figure 4, le point Y est un point à l’intérieur du cercle.
- Dans la figure 4, le point Z est un point à l’extérieur du cercle.

Cercles, mesure d’angles et concepts associés

Angle au centre :

L’angle au centre est formé de deux demi-droites d’origine le centre du cercle.

m°

- L’arc intercepté est l’arc dont les extrémités se situent sur les demi-droites formant l’angle au centre.
- La mesure en degré de l’angle au centre est la même que celle de l’arc intercepté correspondant.

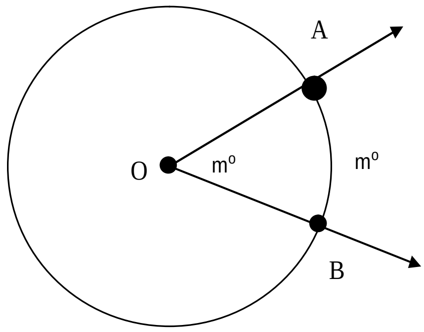


Figure 1

Exemples :

- Sur la figure 1 , l’angle $\widehat{AOB}$ est un <u>angle au centre</u>.
- Sur la figure 1, AB est un arc intercepté.

Angle inscrit :

- Un angle est inscrit dans un cercle si son sommet est un point du cercle et ses côtés sont sécants au cercle.
- Prenons deux points distincts *A* et *B* du cercle. *O* est le centre du cercle et *C* est un autre point du cercle. Alors, on a $\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{ACB}$

Pour l'angle au centre $\widehat{AOB}$, il faut considérer le secteur angulaire qui intercepte l'arc opposé à l'arc contenant *C*.

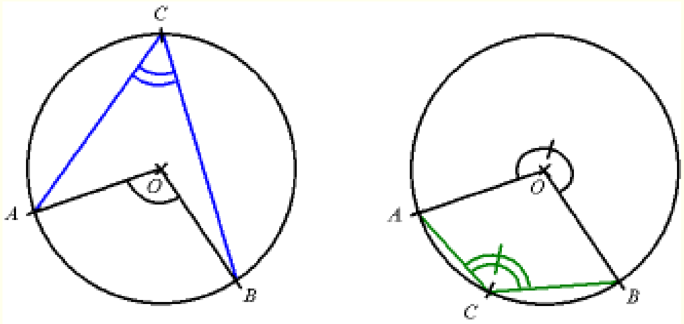


Illustration de la relation entre les secteurs angulaires interceptant un même arc

Propriétés géométriques du cercle

Voici quelques propriétés géométriques du cercle.

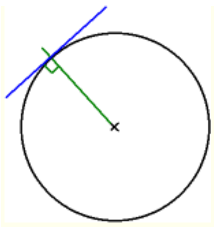
Cercles, mesure d'angles et concepts associés

Mesures

- La longueur d'un arc sous-tendu par un angle de **α degré** est égale à $2\pi\alpha$**R/ 360**.
- Ainsi, pour un angle de 2π (un tour complet), le périmètre (la circonférence) du cercle vaut $\mathbf{2\ \pi\ R}$.
- La longueur d'une corde sous-tendue par un angle α est égale à $\mathbf{2R\ sin}\frac{\alpha}{2}$.
- L'aire du disque délimité par un cercle de rayon R vaut $\pi\ \mathbf{R^2}$;
- Si l'on prend une ficelle de longueur l donnée et que l'on s'en sert pour délimiter une surface fermée, la surface ayant la plus grande aire est délimitée par un cercle.

Tangente

La tangente en un point du cercle est perpendiculaire au rayon en ce point.

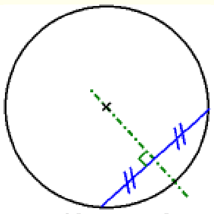


Tangente perpendiculaire au rayon

Médiatrice

- La médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.

Ceci permet de trouver le centre d'un cercle : il suffit de tracer deux cordes non parallèles et de rechercher l'intersection de leurs médiatrices.

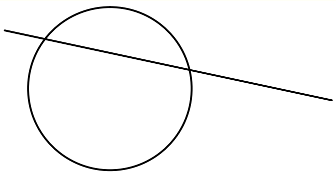


La médiatrice d'une corde passe par le centre

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et le point de concours est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Sécante

- Toute droite coupant le cercle en deux points quelconques est appelée une sécante.



Cercles, mesure d’angles et concepts associés

D’autres définitions:

- Un polygone est **circonscrit** à un cercle si chacun des ses côtés est une tangente au cercle.
- Un polygone est **inscrit** dans un cercle si chacun de ses sommets appartient au cercle.
- Un angle est inscrit dans un cercle si son sommet est un point du cercle et ses côtés sont sécants au cercle

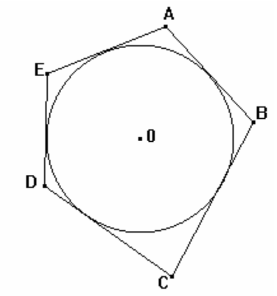


Figure 1

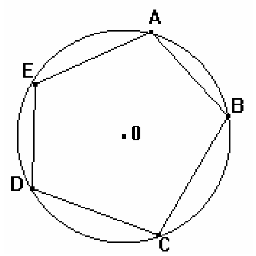


Figure 2

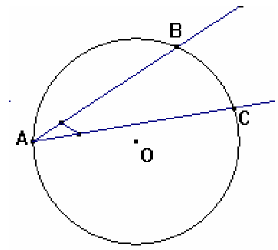


Figure 3

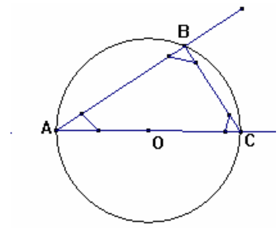


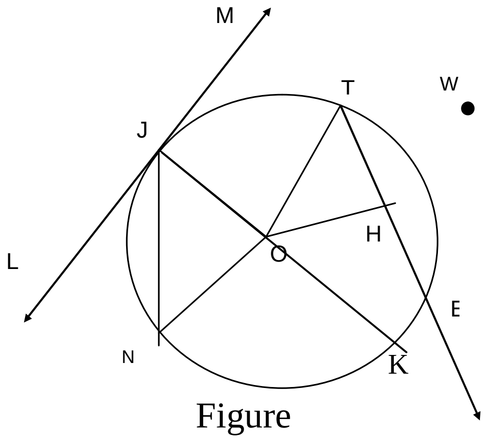
Figure 4

Exemples :

- La figure 1 illustre un polygone circonscrit.
- La figure 2 illustre un polygone inscrit.
- Les figures 3 et 4 illustrent des angles inscrits.

Cercles, mesure d'angles et concepts associés

Exercices



Figure

1. Donne le nom du centre du cercle ______________________
2. Donne un rayon ___________________
3. Donne le nom d'une corde ___________________
4. Donne le diamètre ___________________
5. Donne le nom d'un demi-cercle ___________________
6. Donne le nom d'un arc mineur ___________________
7. Donne le nom d'un arc majeur ___________________
8. Donne le nom d'une tangente ___________________
9. Donne le nom d'une sécante ___________________
10. Donne le nom d'un point intérieur ___________________
11. Donne le nom d'un point extérieur ___________________
12. Donne le nom du point de tangence ___________________
13. Donne le nom d'un angle au centre ___________________
14. Donne le nom d'un angle inscrit __________________
15. Donne le nom d'un angle droit ___________________
16. En quelle unité de mesure peut on exprimer le périmètre ? ___________
17. En quelle unité peut on exprimer la longueur d'un arc ? ______________
18. Quel est le plus grand entre un angle au centre et l'angle inscrit associé ? __________________
19. Quelle relation existe-t-il entre une tangente et le rayon d'un cercle au point de tangence ? ___________________
20. Soit un cercle de centre O et de rayon 3 cm. A et B sont deux points tels que $\widehat{AOB} = 60°$. Calcule la longueur l de la corde [AB].
21. Donne deux points diamétralement opposés

Thème I : Introduction générale a la géométrie

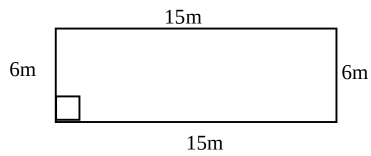
Leçon 5 : Périmètre, aire et volume des figures géométriques

Le sais-tu?

Notion de périmètre et d'aire

Dans un plan, toute figure géométrique possède une surface et un périmètre.
Le **périmètre** d'une figure géométrique plane est la longueur totale des contours de la figure considérée. Il s'exprime en centimètres, mètres etc.
L'**aire** ou la **superficie** d'une figure géométrique est la mesure de la surface qu'elle occupe dans le plan. Elle s'exprime en centimètres carrés, de mètres carrés etc..

Exemples:
Cas d'un rectangle de longueur = **L** et de largeur = **l.**
Tu notes A l'aire du rectangle et P le périmètre du rectangle



A = longueur x largeur
A = 15 x 6
A = 90 m² (mètres carrés)

P = L + l + L + l
P = 2(L + l)
P = 2×21 = 42 m

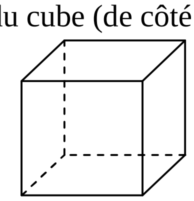
Notion de volume

Dans l'espace tout solide possède un volume. Le **volume** se mesure en mètres cube dans le système international.

Notion d'aire latérale

L'aire latérale d'un objet géométrique à trois (3) dimensions se calcule en procédant à son dépliage pour ainsi faire le total de toutes les différentes aires composant les faces de l'objet. Le résultat s'exprime, souvent, en mètres carrés.

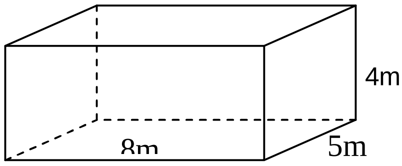
Exemple:
Cas du cube (de côté c)



Aire latérale = total des les aires des différentes faces
A = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9
A = = 54 m²
V = 3 x 3 x 3
V = 27 m³

Périmètre, aire et volume des figures géométriques

Cas d'un prisme rectangulaire de longueur L , de largeur l et de hauteur h,



Aire latérale = total des les aires des différentes faces
A = (4 x 5) + (4 x 5) + (4 x 8) +(4 x 8) + (5 x 8) + (5 x 8)
= 20 + 20 + 32 +32 + 40 + 40
= 184 m^2
Volume = longueur x largeur x hauteur (V = L x l x h)
V = 8 x 5 x 4
= 160 m^3

Formules géométriques pour calculer l'Aire (A) et le périmètre (P) de figures planes

Soit le rectangle de longueur (b) et de largeur (a)

On a : A = ab
et
P = 2a + 2b = 2(a + b)

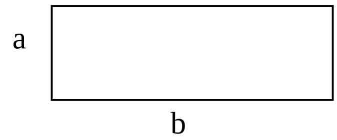


Figure 1

Soit le carré de côté (s)

A = c x c = c^2 (côtés x côtés)

P = c x 4

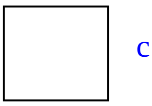


Figure 2

Soit le parallélogramme de base (b) et de hauteur (h)

A = bh = ab sin θ

P = 2a + 2b = 2(a + b)

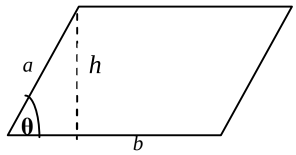


Figure 3

Soit le triangle de base (b) et de hauteur (h)

A = $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab$ sinθ

Périmètre = a + b + c

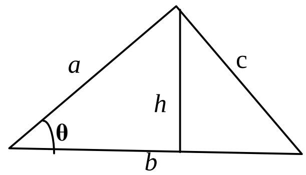


Figure 4

Périmètre, aire et volume des figures géométriques

Soit le trapèze de hauteur (h), grande base (b) et de petite base (a)

A = $\frac{1}{2}h(a+b)$

P = AB + DC + AD + BC

P = a + b + h $\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\phi}\right)$

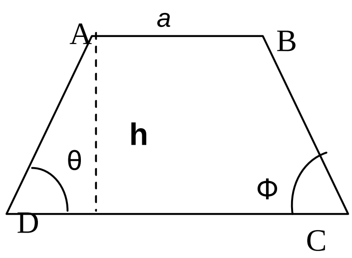
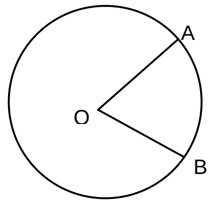


Figure 5

Secteur angulaire d'un cercle

Un **secteur angulaire** est délimité par les côtés de l'angle au centre qui le définit.

Exemple:

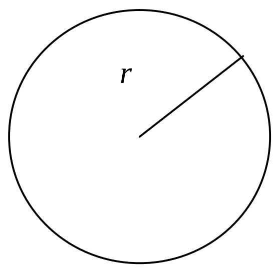


Voici d'autres formules

Soit le cercle de rayon (r)

A = πr^2

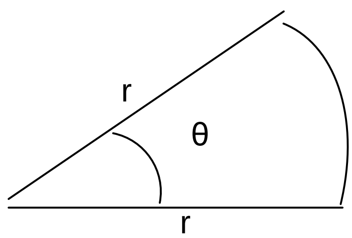
P = $2\pi r$



Soit le secteur angulaire du cercle de rayon (r)

A = $\frac{1}{2}r^2\theta$ [θ en radians]

Longueur de l'arc s = $r\theta$



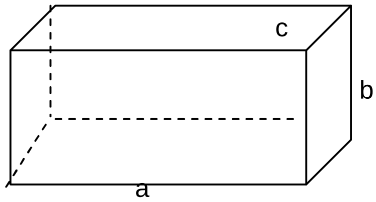
Périmètre, aire et volume des figures géométriques

Formules géométriques pour calculer le volume (V) et l’aire totale (A) de solides de l’espace

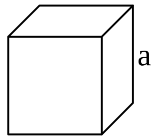
Soit le prisme rectangulaire de longueur (a), hauteur (b) et largeur (c).

V = a x b x c

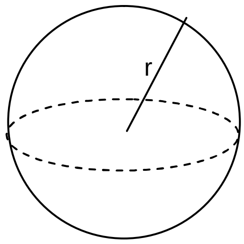
A = 2(ab + ac + bc)



Le volume d’un cube

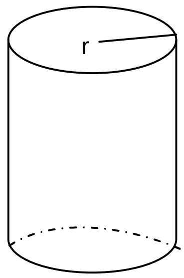


Un cube est un prisme rectangulaire dont tous les côtés sont égaux.
Volume = ax a x a



Soit la sphère de rayon (r)

V = $\frac{4}{3}\pi r^3$ Aire totale = $4\pi r^2$

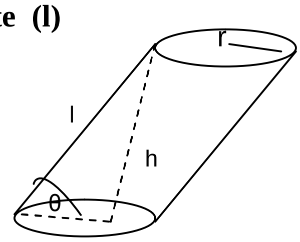


Soit un cylindre de base circulaire de rayon (r) et de hauteur (h)

V = $\pi r^2 h$

Aire latérale = $2\pi rh$

Soit le cylindre de révolution de rayon (r) et de hauteur de pente (l)

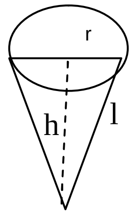


Volume = $\pi r^2 h = \pi r^2 l \sin\theta$

Aire latérale = $2\pi rl = \frac{2\pi rh}{\sin\theta}$

Périmètre, aire et volume des figures géométriques

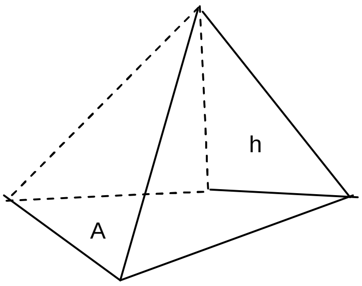
Soit le cône de révolution droit de rayon (r) et hauteur (h)



Volume = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Aire latérale = $\pi r\sqrt{r^2 + h} = \pi r l$

Soit la pyramide d'aire de base (A) et de hauteur (h)



Volume = $\frac{1}{3}Ah$

Périmètre, aire et volume des figures géométriques

Exercices

A. Dessine les figures suivantes en plaçant les nombres donnés de manière appropriée puis calcule l'aire et le périmètre de ces figures.

1. Rectangle: L = 4,5 l = 8,1

2. Carré: côté = 5

3. Parallélogramme: b = 14 , h = 7

4. Triangle: b = 10 , h = 14

5. Cercle de rayon = 5?

B. Dessine les objets de l'espaces suivants en plaçant les nombres donnés de manière appropriée puis calcule l'aire totale et le volume.

6. Cube: côté = 16

7. Prisme rectangulaire: longueur = 4,2 ; largeur = 3 ; hauteur = 8

8. Pyramide: longueur = 4, largeur = 2, hauteur = 6

9. Prisme triangulaire: base du triangle = 2
hauteur du triangle = 5
hauteur du prisme = 8

Thème II : Quelques caractéristiques spéciales en géométrie et leurs applications

Leçon 1 : Symétrie et isométrie

Le sais-tu ?

Les figures géométriques qui sont plates et qui peuvent correctement être dessinées sur une surface plane, sont appelées des figures à deux dimensions ou des figures planes. Beaucoup de figures spéciales à deux dimensions peuvent être dessinées en utilisant des droites.
Certaines **figures géométriques à deux dimensions** possèdent des angles.
Le cercle est une figure plane qui ne possède pas d'angle. Beaucoup de figures planes ont des axes de symétrie.
Plusieurs figures à deux dimensions ont des noms que nous pouvons identifier par le nombre de côtés et/ou des angles qu'elles possèdent. Pour de plus amples renseignements, voir la leçon 5 du thème 2. En outre, retenons qu'un axe de symétrie divise une figure plane en deux figures superposables, qui sont appelées des figures symétriques.

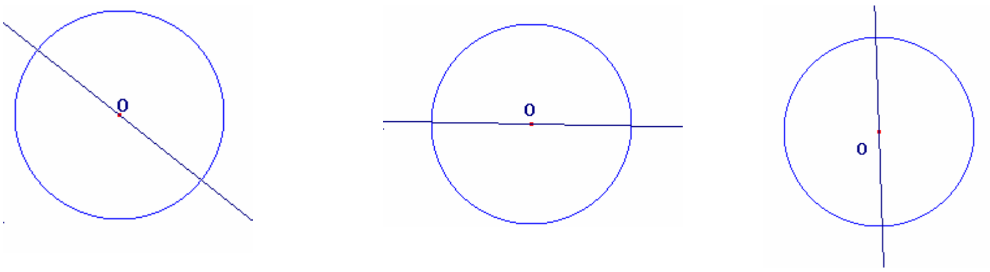
Les figures géométriques qui ont des volumes sont des figures qui possèdent une longueur, une largeur et une hauteur. Elles sont appelées **figures à trois dimensions** ou **solides** ou **figures avec trois coordonnées**. Beaucoup de figures à trois dimensions peuvent être dessinées en utilisant des **sommets**, des **segments de droites**, et des **faces** (figures planes) faisant parties de leur surface.
Beaucoup de figures à trois dimensions possèdent elles aussi des angles.
La sphère est une figure à trois dimensions très connue qui n'a pas d'angle.
Beaucoup de figures à trois dimensions possèdent des **plans de symétrie**. Pour plus de renseignements sur les figures à trois dimensions, voir la leçon 5 du thème 2. Un plan de symétrie divise une figure à trois dimensions en deux figures symétriques**.**

Il y'a d'autres formes de figures géométriques à trois dimensions qui ont des formes semblables mais qui ne sont pas isométriques. Dans cette leçon, nous étudierons les propriétés des figures géométriques qui sont symétriques, semblables ou isométriques.

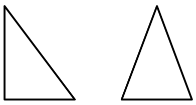
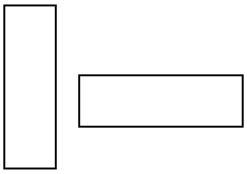
Symétrie et isométrie

Définition : Une figure possède un **axe de symétrie** (L), si cette droite (L) peut être dessinée de sorte qu'elle divise la figure en deux figures géométriques superposables.

Exemple: Considère un cercle C.
Tout diamètre d'un cercle est un axe de symétrie de ce cercle.

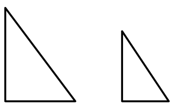
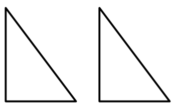


Définition : Deux figures sont dites **semblables** si elles ont la même forme; elles peuvent ne pas avoir les mêmes dimensions.

Exemples:  

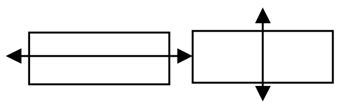
Pas semblables Semblables

Définition : Si deux figures sont semblables et ont les mêmes dimensions, elles sont dites superposables ou **isométriques**.

Exemples:  

Figures semblables mais pas superposables Figures semblables et superposables

Propriétés (P)



P1. Une figure peut avoir plus d'un axe de symétrie.
Exemple : Un rectangle a deux (2) axes de symétrie.

P2. Un cercle a une infinité d'axes de symétrie parce qu'il possède une infinité de diamètres.

P3. Toutes les figures semblables ne sont pas forcément isométriques.

P4. Toutes les figures isométriques sont semblables.

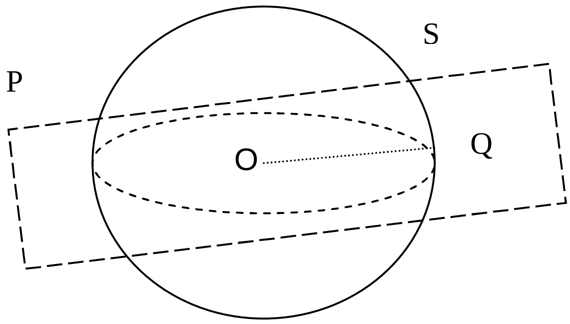
P5. Un axe de symétrie d'une figure donnée divise cette figure en deux figures isométriques.

Symétrie et isométrie

Basés sur les définitions données à la première page de cette leçon, les concepts de symétrie, et d'isométrie pour les figures à trois dimensions sont des extensions naturelles des mêmes concepts pour les figures à deux dimensions. Ainsi nous ne discuterons pas de ces concepts en profondeur pour les figures à trois dimensions.

Définitions : Chaque cercle dans un espace à trois dimensions est contenu dans un plan unique à deux dimensions.
Un cercle dans une sphère dont le plan unique passe par le centre de la sphère est appelé un <u>cercle circonscrit</u>; tous les autres cercles circonscrits à la sphère y gravitent.

Pour une sphère à trois dimensions, les seuls plans de symétrie sont ceux contenant un cercle circonscrit.



<u>Exemple</u> :
Ce plan (Q) contient un cercle circonscrit qui a un plan de symétrie.

Remarques : Une sphère possède une infinité de plans de symétrie.

Quelques solides géométriques ont plus d'un plan de symétrie. Considérons le prisme ci-dessous dont la base est un hexagone régulier (figure A).
Nous pouvons observer deux plans de symétrie pour ce prisme hexagonal dans la fig. A.

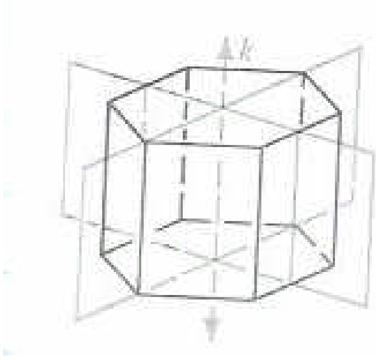
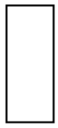
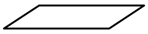


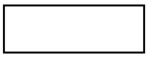
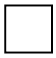
Figure A

Symétrie et isométrie

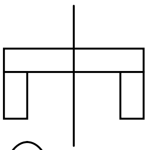
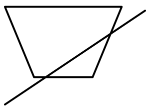
Activité 1

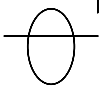
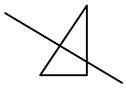
1. Laquelle de ces figures ci-dessous est semblable au quadrilatère ci-contre ? 

A.    C. 

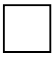
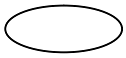
B.    D. 

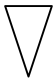
2. Laquelle de ces droites représente un axe de symétrie ?

A.    C. 

B.    D. 

3. Laquelle de ces figures ne possède pas d'axe de symétrie?

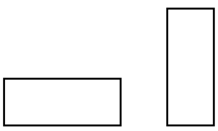
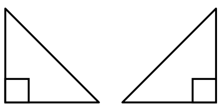
A.    C. 

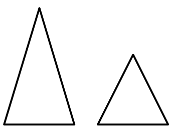
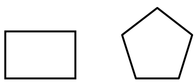
B.    D. 

4. La quelle de ces lettres suivantes possède un axe de symétrie ?

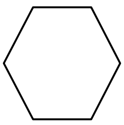
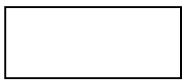
S   **W**

5. Quelles sont les paires de figures qui sont isométriques ? semblables ?

A.    C. 

B.    D. 

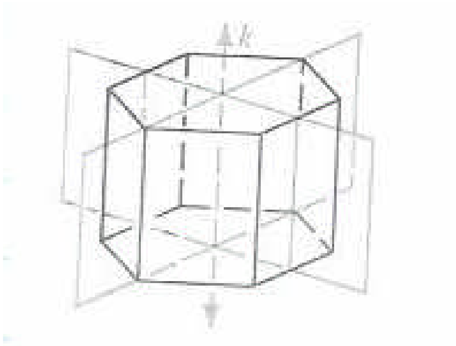
6. Combien de lignes de symétrie peux-tu dessiner avec ces figures ci-dessous ?

Symétrie et isométrie

Activité 2

1. Un prisme hexagonal régulier possède plusieurs plans de symétrie; identifie les autres plans de symétrie dans la figure A ci-dessous



2. Combien de plans de symétrie distincts possède un cube ? ___________.
   Dessine un cube et illustre ces plans de symétrie.

3. Pour un prisme à base rectangulaire, combien de plans de symétrie distincts peux-tu en déterminer ? ______. Fais un dessin avec des illustrations.

4. Pour un cylindre, combien de plans de symétrie distincts peux-tu en déterminer ? ______. Fais un dessin avec des illustrations.

5. Pour un cône de rayon r, combien de plans de symétrie distincts peux-tu en déterminer ? ______. Fais un dessin avec des illustrations.

* Vrai (V) ou faux (F) pour les exercices de 6 à 10.

6. Tous les cubes sont semblables.

7. Tous les cubes sont isométriques.

8. Dans un plan à trois dimensions, seuls les solides identiques sont semblables.

9. Dans un plan à trois dimensions, seuls les solides identiques et ayant les mêmes formes et les mêmes dimensions sont isométriques.

10. Dans un plan à deux dimensions, des figures isométriques n'ont pas nécessairement les mêmes dimensions.

Thème II : Quelques caractéristiques spéciales en géométrie et leurs applications

Leçon 2 : Preuves et méthodes de vérification ; triangles superposables

Le sais-tu ?

A. Preuves :

Un **théorème** en géométrie (ou en mathématique en général) est une proposition ou une déclaration qu'on peut prouver être vraie; c'est souvent une généralisation à propos d'un "ensemble de données" plutôt qu'une propriété qui prouve quelque chose de spécifique.

L'écriture d'une suite de courtes déclarations ou raisons (explications), commençant par ce qui a été donné et concluant par ce que l'on veut montrer comme une vérité s'appelle une **preuve (une démonstration)**. La majeure partie des preuves utilise des informations données, de définitions, postulats (ou axiomes) – incluant celles de l'algèbre et les autres domaines des mathématiques, en plus des théorèmes acceptés comme vérités pour chaque série de déclarations. Le fait de pouvoir prouver des théorèmes s'acquiert par expérience.

Il n'y a pas d'indications précises et pas une seule méthode de prouver un théorème. Cependant, quelques indications ont été jugées très utiles pour déterminer la véracité d'un théorème. On peut en citer :
A. Comprendre les réalités et les propriétés des différents aspects d'un théorème à prouver.
B. Comprendre les résultats antérieurs qui ont été établis et les autres aspects de la géométrie (ou des mathématiques) en relation avec ce théorème. En un mot, comprendre, ce qui est connu déjà.
C. Combiner les informations dans A et B, en réfléchissant sur comment mieux utiliser chaque information connue.

Preuves et méthodes de vérification ; triangles superposables

En général, les preuves en géométrie sont présentées dans un format avec **une colonne à deux entrées** (les déclarations sont inscrites dans la colonne de gauche et les preuves justifiant les déclarations dans la colonne de droite). Il importe de souligner que toute preuve prévue dans un format avec une colonne à deux entrées peut être transformée en un format en paragraphe en écrivant les preuves en dessous de chaque déclaration dans l'ordre où ces dernières ont été présentées. Pour certains, cette méthode est plus commode à cause du fait qu'il est plus facile de donner les preuves de chaque déclaration au fur et à mesure qu'elles sont données et sur la base des résultats antérieurs. Pour beaucoup d'élèves, le succès dans l'écriture des preuves ou de la vérification d'une déclaration est un processus graduel qui s'améliore avec l'expérience.

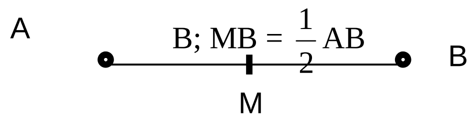
Exemple d'une colonne à deux entrées pour les preuves :

Théorème : Milieu d'un segment de droite.

Si M est le milieu de [AB] alors AM = $\frac{1}{2}$AB et MB = $\frac{1}{2}$AB.

Donnée : M est le milieu de [AB].

À prouver : AM = $\frac{1}{2}$AB

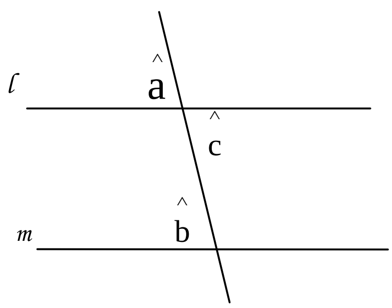


Déclarations :	Preuves
1. M est le milieu de [AB].	1. Donnée
2. AM = MB	2. Définition du milieu
3. AM + MB = AB	3. Postulat addition avec les segments
4. AM + AM = AB, ou 2AM = AB	4. Propriété de substitution. (Étapes 2 et 3)
5. AM = $\frac{1}{2}$AB	5. Propriété de l'égalité
6. MB = $\frac{1}{2}$AB	6. Propriété de substitution (Étapes 2 et 5)

Théorème : Si deux droites parallèles sont coupées par une transversale, alors leurs angles correspondants sont égaux.

Donnée : (L) // (M).

A prouver : $\hat{a} = \hat{b}$



Solution

Plan : Introduis l'angle $\hat{c}$ dans le diagramme de sorte que les angles $\hat{b}$ et $\hat{c}$ soient des angles alternes internes. Alors utilise le théorème sur les angles opposés par le sommet pour établir la conclusion.

Preuves et méthodes de vérification ; triangles superposables

Déclarations	Preuves
1. $(L) \parallel (M)$.	1. Donnée.
2. $\hat{a} = \hat{c}$.	2. Deux angles opposés par le sommet sont égaux.
3. $\hat{c} = \hat{b}$.	3. Si deux droites sont parallèles, alors leurs angles alternes internes sont égaux
4. $\hat{a} = \hat{b}$	4. Propriété de transitivité.

NB : Un plan de résolution a été introduit : une colonne à deux entrées, les déclarations sur une colonne et les raisons ou les preuves correspondantes dans l'autre.

<u>B. Méthodes de vérification</u> :

En géométrie (ou en mathématique en général) Il y a deux (2) genres de preuves: Les preuves directes et les preuves indirectes.

<u>Les preuves directes</u> **:**
Les preuves directes utilisent principalement des raisonnements déductifs; en commençant avec ce qui est donné ou est supposé et en utilisant une série de courtes déclarations (justifiées par des faits acceptés, des termes indéfinis ou définis, des postulats et des théorèmes prouvés antérieurement) pour raisonner point par point jusqu'à ce qu'une conclusion désirée soit atteinte.
La majeure partie des preuves dans un théorème sont libellées sous la forme suivante : "Si . . ., alors . . ." (proposition conditionnelle).

Exemple :

Si M est le milieu du segment [AB], alors $AM = \frac{1}{2}AB$ et $MB = \frac{1}{2}AB$

L'information dans la disposition "Si . . .,." représente les hypothèses ou les données du théorème; elle nous permet de supposer pour commencer que ces hypothèses sont vraies.
L'information dans la disposition "alors . . ." représente ce qui doit être prouvé ou ce qui est déduit des hypothèses.

Les deux (2) théorèmes présentés au début de la leçon sont des exemples de preuves directes, commençant par la disposition "Si . . ., alors . . .".

<u>Remarques</u> :
Il y a trois autres déclarations en relation avec la proposition conditionnelle
"Si . . ., alors . . ." , voir ci-dessous :
Déclaration donnée : Si *p* alors *q*.
Contraposée : Si ce n'est pas *q*, alors ce n'est pas *p*.
Réciproque : Si *q* alors *p*.
Négation : C'est *p* et ce n'est pas *q*.

Preuves et méthodes de vérification ; Triangles superposables

Une déclaration et sa contraposée sont logiquement équivalentes.
Une déclaration n'est pas logiquement équivalente à sa réciproque ou sa négation.
Il y a d'autres formes de preuves directes. Cependant, elles sont semblables à la méthode de vérification dans la disposition "Si . . ., alors . . .".

Preuves indirectes :
Du moment qu'une déclaration conditionnelle "Si . . ., alors . . ." et sa contraposée sont logiquement équivalentes, on peut prouver une déclaration conditionnelle à partir de sa contraposée. Cette méthode est appelée, preuve indirecte.

En général les méthodes indirectes de vérification en géométrie (ou en algèbre) sont des stratégies pour prouver indirectement une déclaration. Pour ce faire, on doit premièrement tenir en considération tous les résultats logiques possibles. Ensuite, on doit tenter de prouver chacune de ces possibilités supposées (sauf celle qui doit être prouvée) et montrer que toutes les solutions des possibilités supposées sont contradictoires ou impossibles. Ainsi, on peut conclure enfin que la possibilité qui reste (la conclusion désirée) est celle qui est vraie. En résumé, la méthode indirecte de preuve suit trois (3) étapes fondamentales:
Étape 1 : Suppose que l'information contenue dans la disposition "alors . . . " (la conclusion) n'est pas vraie.
Étape 2 : Montre que la disposition "Si . . . " (information donnée) et la contraposée de la conclusion "alors…''contredisent une réalité connue.
Étape 3 : Conclus que la déclaration "Si. . . , alors . . ." est vraie.

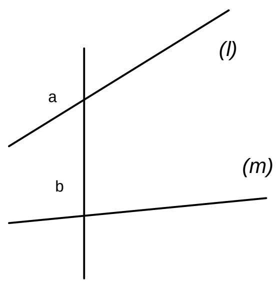
Exemple :

Utilise la méthode des preuves indirectes pour vérifier ce théorème ci-dessous.

Théorème :

Si l'angle $\hat{a}$ et l'angle $\hat{b}$ ne sont pas égaux alors, la droite *(l)* n'est pas parallèle à la droite *(m)*.

Donnée : $\hat{a}$ n'est pas égal à $\hat{b}$
A prouver : Droite *(l)* n'est pas parallèle à la droite *(m)*.



Solution :

En utilisant la méthode des preuves indirectes :

1. Il y a deux possibilités; la déclaration originale et sa contraposée (droite *(l)* parallèle à la droite (m).
2. Suppose que la contraposée est vraie; c'est-à-dire que, la droite *(l)* est parallèle à la droite (m).
3. Si les droites (l) et (m*)* sont parallèles, alors leurs angles correspondants sont égaux, ce qui contredit la déclaration originale.
4. Du moment que la contraposée est fausse, alors la déclaration "droite (l) n'est pas parallèle à la droite (m) " doit être vraie, car étant la seule possibilité restante.

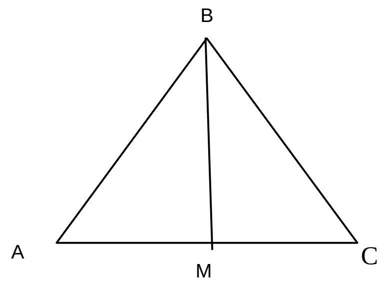
Preuves et méthodes de vérification ; triangles superposables

C. Prouver que des Triangles sont superposables : Cas de triangles superposables : Coté-coté-coté (CCC) ; Coté-angle-coté (CAC); Angle-coté-angle (ACA) :

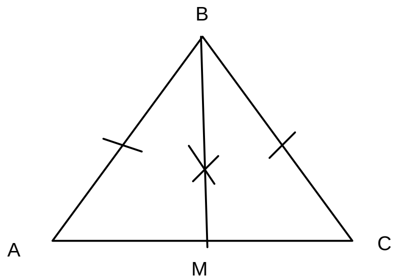
Deux triangles sont superposables si nous pouvons placer sans débordement l'un sur l'autre. Beaucoup de parties en géométrie sont consacrées aux tentatives de prouver que deux (2) triangles sont superposables. Nous conclurons cette leçon avec trois preuves qui établissent que deux triangles sont superposables. Certains mathématiciens les admettent comme des théorèmes, d'autres les acceptent comme des postulats.

Premier cas (CCC):
Si deux triangles ont respectivement leurs trois cotés égaux alors ils sont superposables.

Application :
Données : AB = BC et M est le milieu de [AC].
A prouver : Les triangles AMB et CMB sont superposables



Solution :
Plan : 1. Fais une figure.
Fais le codage des segments. Remarque que le côté [BM] est commun aux deux triangles. Que le côté BM est égal par rapport à lui.
2. Après avoir identifié les trois paires de côtés de même longueur, écris la preuve formelle.



Déclarations	Preuves
1. AB = BC. (Côtés de même longueur).	1. Donnée.
2. M est le milieu de [AC].	2. Donnée.
3. AM = CM. (Côtés de même longueur)	3. Le milieu d'un segment divise ce segment en 2 segments de même longueur.
4. BM = BM. (Côtés de même longueur)	4. Propriété réflexive de l'égalité.
5. Les triangles AMB et CMB sont superposables	5. Théorème 1.

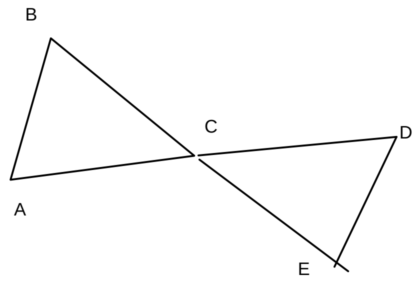
Preuves et méthodes de vérification ; triangles superposables

<u>Deuxième cas ACA</u>:
Si deux triangles ont respectivement un coté égal compris entre deux angles égaux, alors ils sont superposables.

Application :
Donnée : C est le milieu de [BE],

$\hat{B} = \hat{E}$

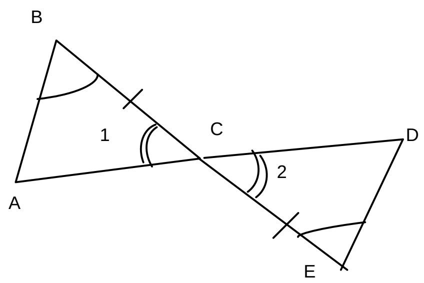
A prouver: Les triangles ABC et DEC sont superposables.



Solution :
Plan : 1 Fais une figure et code les angles égaux

2. Examine la figure. Utilise le théorème 2

3. Écris la preuve formelle.



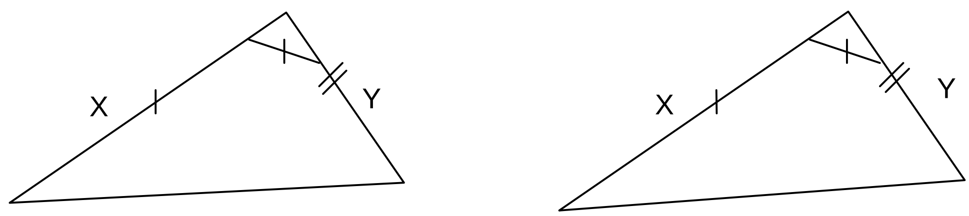
Déclarations	Preuves
1. $\hat{B} = \hat{E}$. (Angles égaux).	1. Donnée.
2. C est le milieu de [BE].	2. Donnée.
3. BC = EC. (Côtés de même longueur)	3. Le milieu d'un segment divise ce segment en 2 segments de même longueur.
4. $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$. (Angles égaux)	4. Deux angles opposés par le sommet sont égaux.
5. les triangles ABC et DEC sont superposables.	5. Théorème 2.

Preuves et méthodes de vérification ; triangles superposables

Troisième cas CAC :

Si deux triangles ont respectivement un angle égal compris entre deux cotés égaux, alors ils sont superposables.

Application



Preuve :

Suppose que l'angle d'un triangle et les côtés adjacents qui forment cet angle sont respectivement égaux à l'angle et aux côtés adjacents d'un deuxième triangle.
Découpe l'un des triangles
Place le sur l'autre de façon à ce que les mêmes angles et les mêmes côtés adjacents se superposent.
Si les côtés gauches sont superposables, et les côtés droits ne le sont pas, alors les deux angles ne sont pas égaux. Puisque les angles sont égaux, les deux paires de côtés doivent être superposées. Est-ce que le sommet du côté gauche du premier triangle coïncide avec le sommet du côté gauche du deuxième triangle ? Les deux sont à une même distance du sommet commun, le long d'une droite commune, par conséquent ils constituent le même sommet. Par ce même raisonnement, le troisième sommet du premier triangle coïncide avec le troisième sommet du deuxième triangle. Les côtés et angles coïncident et les triangles sont égaux. Cette méthode de prouver la conformité est appelée CAC.

Preuves et méthodes de vérification ; triangles superposables

Activité 1

Pour chaque théorème écrit dans cette leçon, indique les situations suivantes :

- La contraposée ;
- La réciproque
- La négation.

Tente de prouver une de ces propositions.

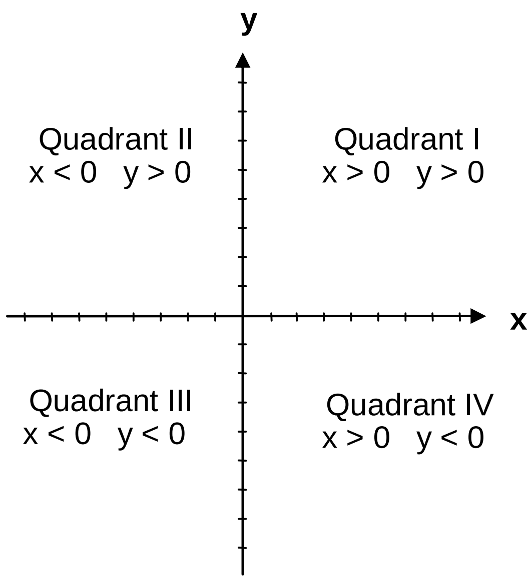
Thème II : Quelques caractéristiques spéciales en géométrie et leurs applications

Leçon 3 : Les coordonnées en géométrie et les transformations géométriques

Le sais-tu ?

Les coordonnées en géométrie :

Une surface plane qui s'étend à l'infini dans toutes directions est une représentation d'un plan géométrique. L'axe des abscisses (axe des x) et l'axe des ordonnées (axe des y) divisent le plan en quatre régions appelées quadrants. Le quadrant où x et y sont positifs est appelé le quadrant I. Les trois autres quadrants sont représentés dans la figure ci-dessous. En géométrie, deux droites distinctes déterminent un plan unique. Les axes x et y déterminent un plan unique. Chaque point A dans le plan possède des coordonnées qui correspondent à un couple de nombres (x, y), on traduit cela en écrivant A (x, y). Le couple de nombres (x, y) est appelé **coordonnées cartésiennes du point A**.



Les coordonnées en géométrie
et les transformations géométriques

Ce système de coordonnées (x, y) identifié ici est appelé système de coordonnées cartésiennes du plan. Il y a d'autres types de systèmes de coordonnées qui sont parfois utilisés en géométrie.

Sur l'axe horizontal du plan, axe des abscisses (axe des x), les positions positives sont situées (en général) à la droite de l'origine; les positions négatives, à gauche.

Sur l’axe des ordonnées (axe des y) représenté par l'axe vertical, les positions positives sont situées (en général) vers le haut de l’origine; les positions négatives vers le bas.

Ces deux axes sont perpendiculaires et passent par l’origine de coordonnées (0,0), point d’intersection de l’axe des x et de l’axe des y.

Un point est un emplacement sur un plan identifié par un couple de coordonnées. La première coordonnée est mesurée le long de l'axe des x; la seconde, le long de l'axe des y.
Ex : Le point (1, 2) représente une (1) unité sur l’axe des x à droite en partant du point d’origine et deux (2) unités de l’axe des y, au dessus du point d’origine.

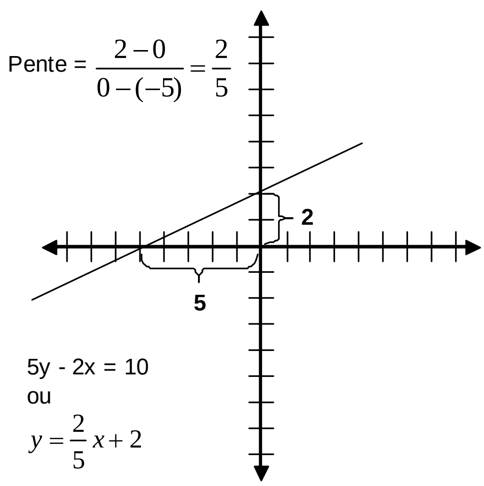
Une droite est déterminée par deux points du plan, ou par un point de la droite et sa pente.

Une équation linéaire est une équation d’une droite.
Forme standard d’une équation linéaire : Ax + By = C.

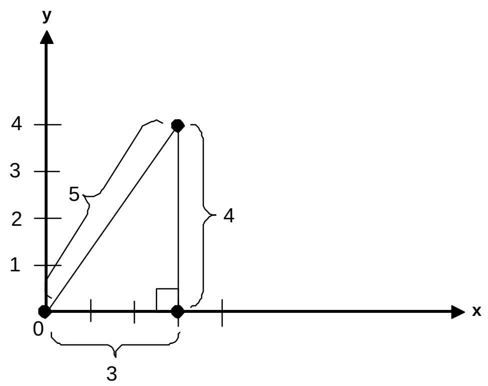
Pente = $-\frac{A}{B}$; y-intersection = $\frac{C}{B}$; x-intersection = $\frac{C}{A}$.

Forme d’une équation linéaire avec une pente : y = mx + b ou y – k = m(x – h) d’une équation linéaire ; ou m est la pente et (h, k) est un point de la droite;
Exemple d’équation d’une droite avec ses coordonnées géométriques.

Par exemple : 5y – 2x = 10
ou $y = \frac{2}{5}x + 2$



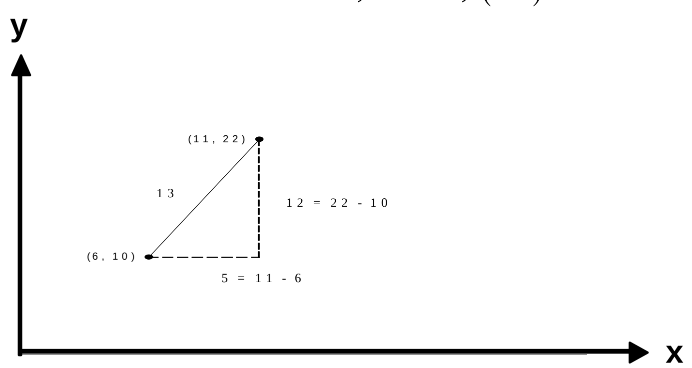
Les coordonnées en géométrie
et les transformations géométriques



Quand deux points ne sont pas sur un ligne horizontale ou verticale, on peut trouver la distance entre les points en utilisant le théorème de Pythagore.

Exemple : Trouve la distance entre les points A(4, -2) et B(1, 2).

Solution : Trace les segments (horizontal et vertical) . Les coordonnées de T sont (1, -2).
Alors AT = 3, BT = 4, $(AB)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, et AB = 5.



Exemple : La distance entre deux points A (6, 10) et B (11, 22) est de :

$$d = \sqrt{(11-6)^2 + (22-10)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$$

La forme standard pour la <u>formule de la distance</u> entre deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ est :

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Une formule générale pour la distance entre l'origine et un point (x, y) est d = $\sqrt{x^2 + y^2}$.

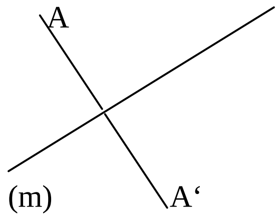
Les coordonnées en géométrie
et les transformations géométriques

<u>Les transformations géométriques</u> :

Dans cette leçon nous présenterons quelques définitions et exemples de quatre types de transformation largement connus et utilisés : réflexions, translations, rotations.

<u>Une symétrie orthogonale</u> d'axe (m) est une transformation telle que

- tout point de (m) est invariant ;
- un point A a pour image un point A' tel que (m) soit la médiatrice de [AA'].

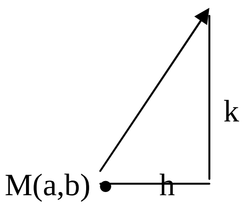


Nous utilisons la notation $S_{(m)}(A) = A'$ qui signifie que A' est l'image de A par la symétrie orthogonale S_m.

.

<u>La translation</u> est une transformation du plan telle que l'image d'un point M(a, b) soit le point M'(a + h, b + k) ; h et k étant deux nombres réels donnés.

Une translation a pour effet de déplacer chaque point avec la même distance dans la même direction.

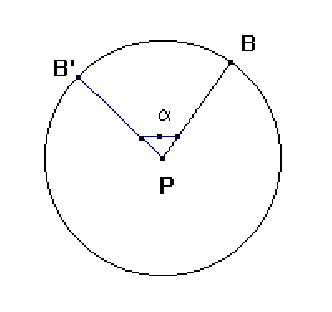


Nous utilisons la notation $t_{(h,k)}(M)$ qui signifie que l'image du point M(a, b) est obtenue en se déplaçant à partir du point M(a,b) de h unités dans la direction des x ensuite de k unités dans la direction des y.

Dans une translation, les mesures des distances et des angles sont conservées.
Dans une symétrie, les mesures des distances et des angles géométriques sont conservées

<u>Une rotation</u> de centre P et d'angle α degrés de sens donné est une transformation du plan telle que :

- P est invariant,
- Pour tout point $B \neq P$, l'image de B est B', où $\widehat{BPB'} = \alpha$
- et PB = PB'
- B' est obtenu en tournant dans le sens de la rotation

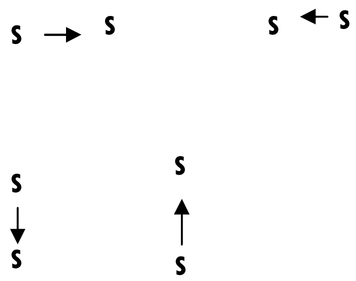


.

Les coordonnées en géométrie et les transformations géométriques

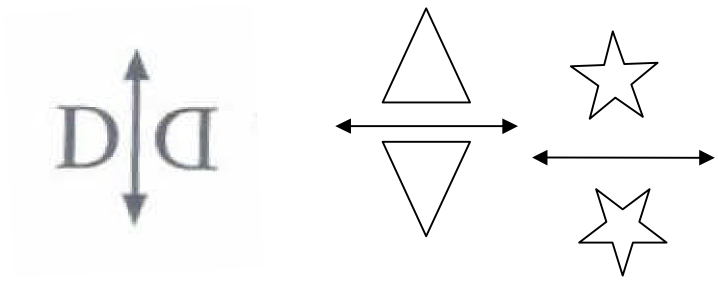
Plus précisément, pour la translation d’une figure, nous devons la déplacer à droite, à gauche, en haut, en bas ou en combinant les déplacements dans tous ces sens:

Exemple :



Le transformé d’une figure par une symétrie orthogonale par rapport à une droite est une figure inversée.

Exemple :

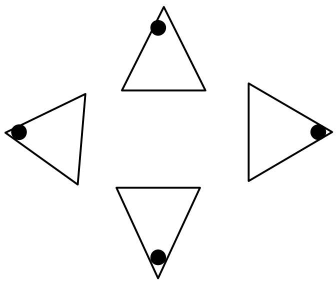


Pour transformer une figure par rotation, nous devons la tourner comme sur une montre.

(12:00)

Exemple :

¼ sens inverse (9:00)



¼ sens normal (3:00)

½ sens normal ou inverse (6:00)

Les coordonnées en géométrie et les transformations géométriques

Propriétés des transformations géométriques :

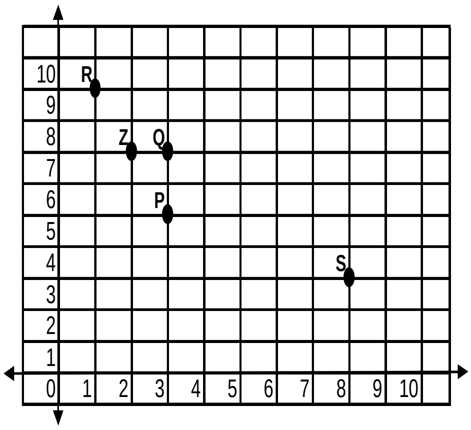
Nous sommes maintenant en mesure de résumer les propriétés des transformations. En particulier, nous sommes intéressés par ce qui est conservé sous chaque genre de transformation.

1. Les symétries orthogonales conservent (a) la distance, (b) la mesure d'angle géométrique, (c) le milieu, (d) le parallélisme et (e) la colinéarité.
2. Les translations conservent ces mêmes cinq propriétés, de (a) à (e).
3. Les rotations conservent toutes les cinq propriétés aussi.

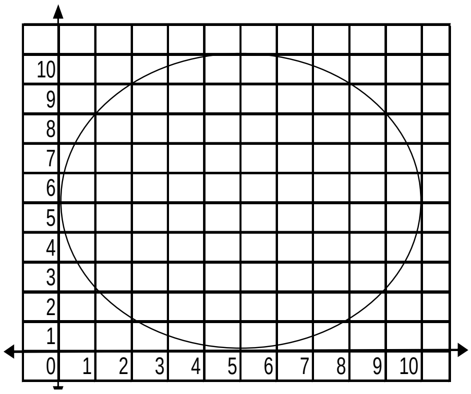
Les coordonnées en géométrie et les transformations géométriques

Activité 1

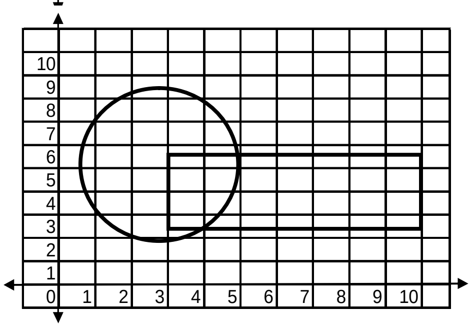
1. Quelles sont les coordonnées des points indiqués dans ce plan ?



Q ( )
P ( )
R ( )
S ( )
Z ( )



2. Lequel de ces couples de coordonnées est le plus proche du couple de coordonnées du centre de ce cercle ?
(6,6) ; (5,6) ; (5,5) : (4, 5) ; (5,4) ; (4,4)



3. Indique les coordonnées d'un point qui se trouve :
   a. Dans le cercle mais pas dans ou sur le rectangle.
   b. Dans le rectangle, mais pas dans ou sur le cercle.
   c. À la fois dans le cercle et dans le rectangle.

4. Calcule la distance entre les points suivants : A (-4, 6) et B (2, 10).
5. Trouve l'équation de la droite passant par les points suivants : C (2, 3) et D (6, 10).

Les coordonnées en géométrie
et les transformations géométriques

Activité 2

À partir de ce que tu as appris dans la leçon concernant les transformations géométriques :

1. Dessine un exemple d’image d’une figure géométrique dans le plan par une symétrie orthogonale d’axe (m).

2. Dessine quelques exemples de translation dans le plan.

3. Dessine quelques exemples de rotation dans le plan.

Thème II : Quelques caractéristiques spéciales en géométrie et leurs applications

Leçon 4 : Quelques constructions géométriques spéciales

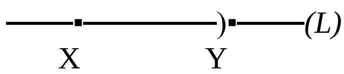
Le sais-tu ?

En géométrie un des grands défis est de partir d'une figure donnée et de construire une autre figure superposable (ou isométrique) par rapport à celle donnée ou de construire une autre figure géométrique en relation avec celle qui est donnée. Dans cette leçon, les figures géométriques seront construites en utilisant seulement deux instruments, une <u>règle</u> et un <u>compas</u>. Dix constructions fondamentales seront présentées.

Construction 1 : Soit un segment donné, construis un autre segment de même longueur.

Segment donné : [AB]

Construire un autre segment de même longueur que [AB]
Procédure :



1. Utilise une règle pour tracer une droite *(L)*.
2. Choisis un point sur la droite *(L)*, appelé X.
3. Ajuste ton compas pour un rayon égal à AB (avec X représentant le centre).
   Trace un arc de cercle coupant la droite *(L)*. Annote le point d'intersection Y .

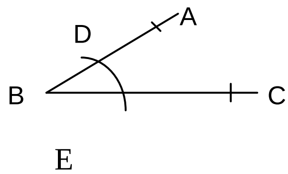
XY est égale à AB.

Raison : AB étant utilisé pour déterminer le rayon du cercle de centre X, XY = AB

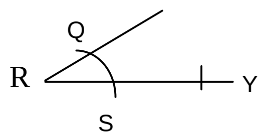
Construction 2 : Soit un angle donné, construis un autre angle de même mesure

Angle donné : $\widehat{ABC}$

Construire un autre angle égal à $\widehat{ABC}$



Procédure :
1. Dessine un rayon [RY].
2. Utilise B comme centre d'un cercle et prends n'importe quel rayon puis trace un arc coupant [BA] et [BC]. Note respectivement ces points d'intersection D et E,.



Quelques constructions géométriques spéciales

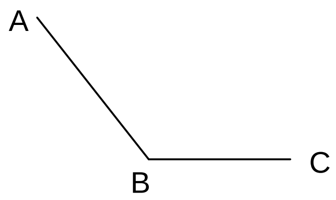
3. Utilisant R comme centre et le même rayon dans l'étape 2, trace un arc coupant [RY). Note S le point d'intersection de l'arc et du segment [RY] de la demi-droite [RY).
4. Utilisant S comme centre du cercle et un rayon égal à DE, trace un arc coupant l'arc tracé à l'étape 3 au point *Q*.
5. Trace [RQ).

$Q\hat{R}S$ est égal à $A\hat{B}C$.

Raison : Si tu traces [DE]et [QS], les triangles DBE et QRS sont isométriques

Construction 3 : Soit un angle donné, construis la bissectrice de cet angle.

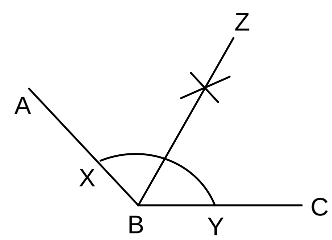
Soit : $A\hat{B}C$.



Construis la bissectrice de $A\hat{B}C$.

Procédure :

1. Utilisant B comme centre et prends n'importe quel rayon, trace ensuite un arc qui a une intersection avec [BA) au point X et avec [BA) au point Y.
2. Utilise X comme centre et avec le même rayon trace un arc.
3. Utilise Y comme centre et avec le même rayon trace un arc qui coupe l'arc tracé au 2° au point Z.
4. Trace [BZ).



[BZ).est la bissectrice de $A\hat{B}C$.

Preuve : Si tu traces [XZ] et [YZ],
Les triangles XBZ et YBZ sont isométriques

Ainsi $X\hat{B}Z = Y\hat{B}Z$ et (BZ) est la bissectrice de $A\hat{B}C$.

Construction 4 : Soit un segment donné, construis sa médiatrice.

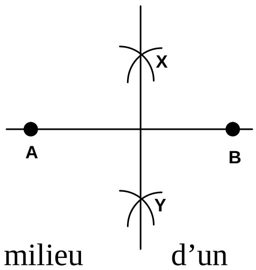
Soit [AB].

Construis la médiatrice du segment [AB].

Quelques constructions géométriques spéciales

Procédure :

1. Utilisant un rayon supérieur à $\frac{1}{2}AB$, trace quatre arcs de même rayon. (deux arcs avec A comme centre et deux autres avec B comme centre). Appelle les points d'intersection de ces arcs respectivement X et Y.
2. Dessine (XY).



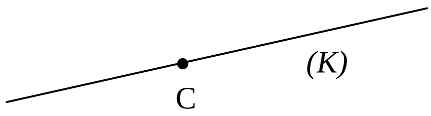
(XY) est la médiatrice du segment [AB].

Justification : Les points X et Y sont équidistants de A et B. Ainsi, (XY) est la (XY) est la médiatrice du [AB].

Remarque : On peut aussi utiliser la construction 4 pour trouver le milieu d'un segment.

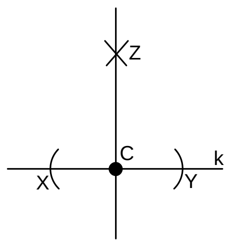
Construction 5 : Soit un point donné sur une droite, construis la perpendiculaire à la droite en ce point.

Soit le point C sur la droite *(K).*
Construis une droite perpendiculaire à *(K).*au point (C).



Procédure :

1. Utilise C comme centre et prends n'importe quel rayon, trace ensuite des arcs coupant la droite *(K).*aux points X et Y.
2. Utilise X comme centre et un rayon supérieur à CX, trace un arc. Utilise Y comme centre et avec le même rayon, trace un arc coupant l'arc de centre X au point Z.
3. Trace (CZ) .



(CZ) est perpendiculaire à la droite *(K).* au point C.

Raison : Les points X et Y sont construits de sorte que C soit à égale distance des points X et Y. Ensuite, nous constatons que Z est à égale distance des points X et Y.
Ainsi, (CZ) est la médiatrice de [XY], et (CZ) $\perp (K)$ au point C.

Quelques constructions géométriques spéciales

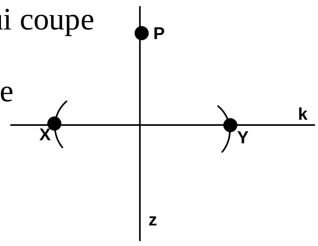
Construction 6 : Soit un point donné à l'extérieur d'une droite, construis la perpendiculaire à la droite passant par ce point.

Soit un point P à l'extérieur de la droite (*k*).

Contruire la perpendiculaire à (*k*) passant par P.

Procédure :

1. Utilisant P comme centre, trace deux arcs de même rayon qui coupe la droite (*k*) aux points X et Y.
2. Utilisant X et Y comme centres et un rayon convenable, trace des arcs qui se coupent au point Z.
3. Trace [PZ].

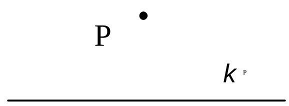


[PZ] est la perpendiculaire de (*k*).

Raison : Les points P et Z sont équidistants par rapport à X et Y.
Ainsi [PZ] est la bissectrice perpendiculaire de [XY] ; aussi, $[XY] \perp k$.

Construction 7 : Soit un point à l'extérieur d'une droite, construis la parallèle à la droite donnée passant par le point.

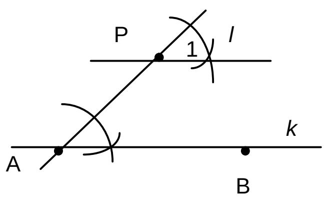
Soit un point P à l'extérieur de la droite (*k*).



Contruire la droite parallèle à (*k*) et passant par le point P.

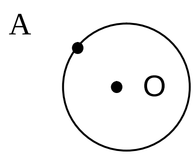
Procédure :

1. Soient A et B deux points sur la droite (*k*). Trace [PB].
2. Au point P, construis l'angle $\hat{1}$ de façon que $\hat{1}$ et $P\hat{A}B$ soient égaux (angles correspondants). Soit (*l*) la droite contenant le rayon construit.
   (*l*) est la droite passant par P et qui est parallèle à *k*.



Preuve : Si deux droites sont coupées par une transversale et que leurs angles correspondants sont égaux, alors ces droites sont parallèles. (Postulat)

Construction 8 : Soit un point sur un cercle, construis la tangente au cercle à partir de ce point donné.



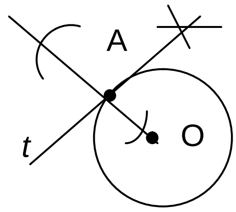
Soit le point (A) sur le cercle (O).

Construire la tangente au cercle (O) passant par (A).

Quelques constructions géométriques spéciales

Procédure :

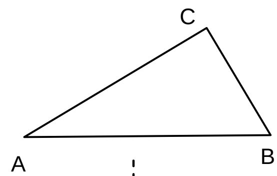
1. Trace [OA].
2. Trace la droite perpendiculaire à [OA] au A (droite *t*).



La droite (*t*) est tangente au cercle O au point A.

Indication : *t* étant perpendiculaire au rayon $\overline{OA}$,
t est tangente au cercle O.

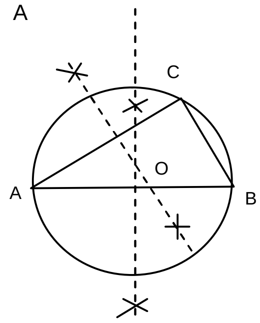
Construction 9 : Soit un triangle, trace un cercle circonscrit au triangle.
Soit le triangle (A, B, C) noté (ΔABC).
Construire un cercle passant par les points A, B et C.



Procédure :

1. Trace la bissectrice perpendiculaire à n'importe quels deux côtés du triangle ABC. Appelle O le point d'intersection des deux bissectrices.
2. Utilisant O comme centre et [OA] comme rayon, trace un cercle.

Le cercle passe par les points A, B, et C.



Construction 10 : Soit un triangle ABC. Trace le cercle inscrit un cercle à ce triangle.

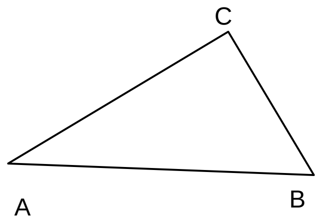
Soit l'angle $\hat{ABC}$

Construis un cercle tangent aux côtés $[AB],[BC]$ et [AC]

Procédure :

Construis un cercle tangent aux côtés $[AB],[BC]$ et [AC]

Procédure :

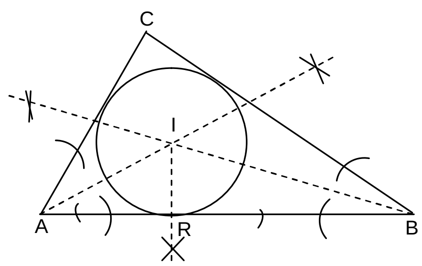


1. Construis la bissectrice des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$.
   Note le point d'intersection *I*.
2. Construis la perpendiculaire à partir du point *I* au côté [AB]. Soit le point R, représentant l'intersection avec[AB].
3. Utilisant *I* comme centre et IR comme rayon, dessine le cercle.

Indication :

Cercle *I* est tangent à $[AB],[BC]$ et [AC]

.



Quelques constructions géométriques spéciales

Activité 1

Prends une règle et un compas et essaie de concevoir et de configurer toutes les dix (10) constructions présentées dans cette leçon.

Thème II : Quelques caractéristiques spéciales en géométrie et leurs applications

Leçon 5 : Applications : Résolution de problèmes réels avec la géométrie

Le sais-tu ?

Le mot géométrie est dérivé des mots grecs ‘’geos’’ (qui signifie la terre) et ‘’metron’’ (qui signifie mesure). Les anciens égyptiens, chinois, babyloniens, romains, et grecs avaient utilisé la géométrie pour examiner la navigation, l'astronomie et autres occupations pratiques.

Les grecs avaient pensé systématiser les données géométriques qu’ils ont connues en établissant des raisonnements logiques et des relations entre ces données. Les travaux des scientifiques comme Thalès (600 avant J. C.), Platon (390 avant J. C.) et Aristote (350 avant J. C.) dans la systématisation des données et principes géométriques ont été concentrés et résumés dans des textes écrits, en 325 avant J. C., par Euclide. Ces textes remarquables sont en usage depuis plus de 2000 années.

Depuis des siècles, chaque culture, chaque pays a utilisé et a étudié la géométrie. Dans cette leçon, une variété de ces applications pratiques en géométrie sera présentée.

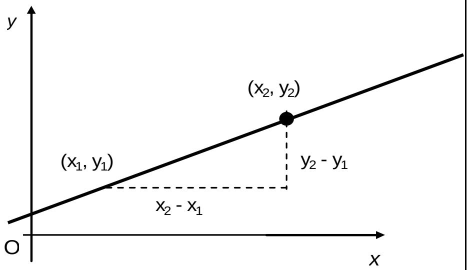
Applications : Résolution de problèmes réels avec la géométrie

Exemple 1 : Pente d'une droite.

L'effet d'inclinaison ou la pente, doit être considéré dans une variété de situations de tous les jours. Quelques exemples sont la pente d'une route, la hauteur d'un toit, l'inclinaison d'une rampe de fauteuil roulant, et la pente d'une plate-forme déchargeant, tel que celui d'un moulin (montré dans la photo à droite). Dans cet exemple, l'idée simple d'inclinaison est généralisée et est montrée de façon très précise par le concept mathématique de pente d'une droite passant par deux points.

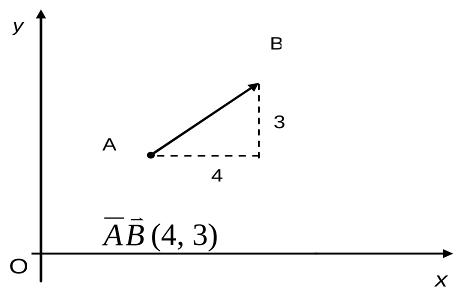
Simplement, la pente est la proportion, rapport de la variation de y (le changement vertical) sur la variation correspondante de x (le changement horizontal). Pour la droite non verticale passant par les points M (x_1, y_1) et N (x_2, y_2), la pente m, appelée aussi coefficient directeur est égale à

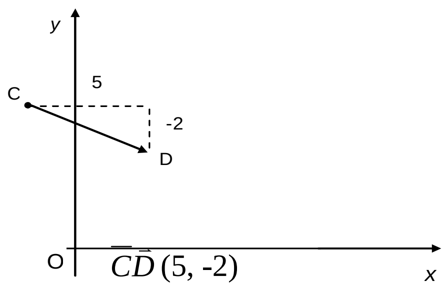
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Variation\,de\;\;y}{Variation\,de\;\;x}$$



Exemple 2 : Vecteurs.

Le mouvement d'un bateau peut être décrit en donnant sa vitesse et sa direction, tel que 50 km/h vers l'est. N'importe quelle grandeur telle que la force, la vitesse, qui posséde les caractéristiques suivantes magnitude (taille), direction et sens, est un vecteur.
Lorsqu'un bateau se déplace du point A vers le point B, son mouvement peut être représenté en traçant une flèche au dessus de A vers B, $\overrightarrow{AB}$ ("vecteur AB"). Si $\overrightarrow{AB}$ est représenté dans un plan avec les coordonnées x et y, alors le mouvement peut aussi être représenté par un couple de coordonnées. $\overrightarrow{AB}$ $(x_B - x_A \,;\, y_B - y_A)$





Applications : Résolution de problèmes réels avec la géométrie

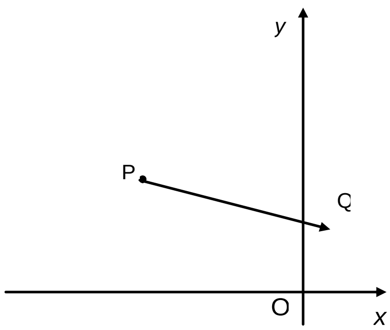
La **longueur** du vecteur $\overline{A}\vec{B}$ est la distance entre les points A et B. On peut utiliser le **Théorème de Pythagore** ou la formule de la distance pour trouver la longueur d'un vecteur. Dans les figures précédentes la longueur du vecteur AB est égale à la distance entre les points A et B notée AB, la longueur du vecteur CD est égale à la distance entre les points C et D notée CD.

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

et $$CD = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Exemple : Soient les points P(-5, 4) et Q(1, 2)

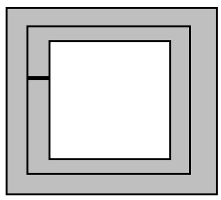
a. Représente $\overrightarrow{PQ}$.
b. Détermine les coordonnées de $\overrightarrow{PQ}$.
c. Calcule PQ.



Solution :
a. (voir figure ci-contre
b. $\overrightarrow{PQ}$ (1 – (-5), 2 – 4) = (6, -2)

c. PQ = $\sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

<u>Exemple 3 : La chaussée</u>.



Problème : Montre que la surface d'un trottoir qui entoure un carré (voir figure à droite) est égale à la largeur (l) du trottoir multipliée par la longueur totale de la ligne intérieure au milieu (L) : K = l . L

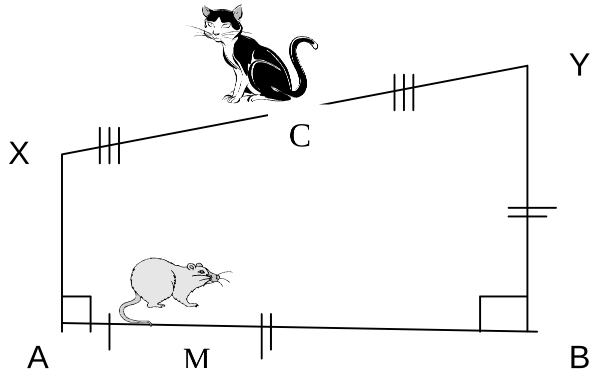
(La ligne intérieure est le carré dont les côtés sont portés par les segments qui partagent les bandes formant le trottoir en deux bandes de même largeur.)

Solution :
Soit c = côté du carré intérieur; alors le côté du grand carré sera c + 2l. L'aire de la chaussée est la différence des aires des deux carrés. Ainsi :

$$\begin{aligned} K &= (c+2l)^2 - c^2 \\ &= c^2 + 4cl + 4l^2 - c^2 \\ &= 4cl + 4l^2 \\ &= l\,(4c + 4l) \end{aligned}$$

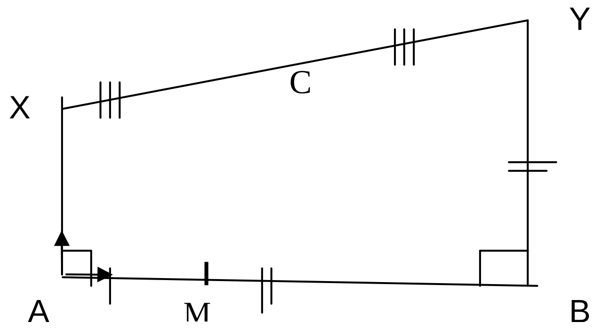
Or L = 4 (c + l) ; d'où le résultat cherché.

Applications : Résolution de problèmes réels avec la géométrie



Exemple 4 : Jeu du chat et de la souris.
On considère deux points fixes A et B conformément à la figure ci-contre.
Une souris se déplace sur le segment [AB].
Soit M la position de la souris; les points X et Y sont tels que
[AX]⊥ [AB] avec AX = AM, et avec [BY]⊥ [AB] BY = BM.
Le chat est situé au point C le milieu de $[XY]$. Détermine la position du chat lorsque la souris se déplace sur [AB].

Une solution possible
Considère un repère cartésien orthonormé (A, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (voir figure).
Note AB = a. On a A (0 ; 0) , B(0 ; a), M(x ; 0), X(0 ; x), Y(a ; a-x).
Puisque C est le milieu de [X,Y] pour toute position de M sur le segment [A,B], on a :
$x_C = \dfrac{0+a}{2} = \dfrac{a}{2}$ et $y_C = \dfrac{x+(a-x)}{2} = \dfrac{a}{2}$.
Quand la souris se déplace sur [A,B], les coordonnées de C ne changent pas. Donc le chat reste immobile.

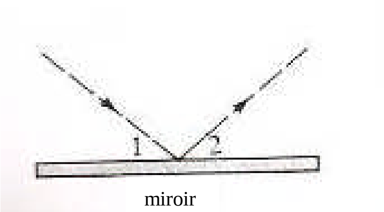


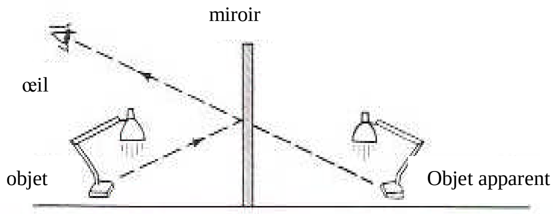
Exemple 5 :

Applications : Résolution de problèmes réels avec la géométrie

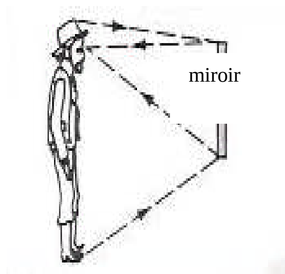
Bien que quelques charpentiers apprennent leur métier sur quatre années de formation, la plupart d'entre eux apprennent par apprentissage pratique. Ces ouvriers commencent par la position d'apprenti et deviennent ensuite des aide-charpentiers. Pendant qu'ils exercent le travail, ils acquièrent graduellement les techniques nécessaires pour devenir des charpentiers qualifiés. Les charpentiers doivent pouvoir mesurer précisément et appliquer leur connaissance d'arithmétique, de géométrie, et d'algèbre simple. Ils bénéficient aussi de leurs capacités de pouvoir lire et comprendre les plans techniques des projets et graphiques.

<u>Exemple 6 : Miroirs</u>.
Si un rayon de lumière est capté par un miroir à un angle de 40 degrés, il sera réfléchi du miroir à un même angle de 40 degrés. L'angle entre le miroir et le rayon réfléchi de la lumière est toujours égal à l'angle entre le miroir et la lumière. Dans le diagramme qui suit, $\hat{2} \cong \hat{1}$ (sensiblement égal).

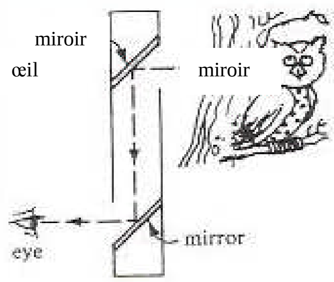




<u>Exemple 7 : La représentation des objets dans un miroir</u>.
Nous voyons des objets dans un miroir quand leurs reflets sont aperçus par nos yeux. Les objets apparaissent couchés derrière le miroir comme le montre le diagramme suivant.
Tu n'as pas besoin d'un miroir long ou large pour voir entièrement ton image. Un miroir de longueur égale à la moitié de ta taille peut suffire s'il est positionné comme c'est indiqué sur la figure ci-contre. Tu peux ainsi voir le sommet de ta tête en haut et tes pieds au bas du miroir. Si le miroir est dans une position haute ou trop basse, tu ne verras pas ton corps en entier.



<u>Exemple 8 : La géométrie de la construction d'un périscope</u>.
Un périscope utilise des miroirs pour permettre à un téléspectateur de voir au-dessus de son spectre de vision. Le diagramme de droite est une illustration simple du principe utilisé dans un périscope. Il possède deux miroirs, parallèles au sommet et au fond. Les miroirs sont placés dans un angle donné avec l'horizontale. La lumière horizontale du reflet d'un objet entrant au sommet est réfléchie au bas du miroir au fond. Les objets sont alors reflétés à l'oeil du téléspectateur.



Applications : Résolution de problèmes réels avec la géométrie

Exemple 9 : Concevoir et opérer des engrenages dans les machines.

Deux engrenages ont un **ratio** $\frac{a}{b} = k$, si le premier a p niveaux (dents), le second q niveaux (dents) et $\frac{p}{q} = k$. Le ratio des engrenages détermine le rapport des vitesses de tournage des deux machines. Par exemple, un ratio des engrenages de $\frac{3}{2} = 1{,}5$ signifie que la petite machine fera 1,5 tour pour chaque révolution de la grande machine. Trois engrenages en tandem (suivant la figure 1) sont tels que la vitesse relative de tournage de la position A à la position B d'Engrenage est égale à celle de B à C (qui est elle-même indéterminée). Si l'engrenage A a 18 dents et l'engrenage C a 8 dents, le nombre de dents que l'engrenage B possède est la moyenne géométrique des nombres d'engrenages de A et C. (En utilisant la formule du ratio des engrenages définie ci-dessus).

$$\frac{18}{x} = \frac{x}{8}$$

Autrement dit, en algèbre, $x^2 = 18 \times 8 = 144$, ce que donne x = 12 dents pour l'engrenage B. Les vitesses relatives de tournage peuvent être trouvées maintenant : celle de l'engrenage C à l'engrenage A est $\frac{18}{8} = 2{,}25$; alors que celle de l'engrenage C à l'engrenage B ou de l'engrenage B à l'engrenage A (supposées être égales) sont chacune égale à $\frac{18}{12} = 1{,}25$. Notons que $2{,}25 = (1{,}25)^2$. Un fait intéressant pour les engrenages avec les trains dans une séquence linéaire est que s'il y a n + 1 engrenages en tandem, et que toutes les paires engagées ont la même vitesse relative de tournage (k)> 1, alors le plus petit engrenage a une vitesse de tournage de k^n par rapport a la vitesse du plus grand engrenage.

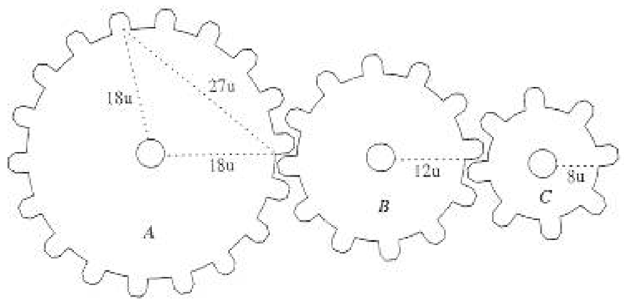
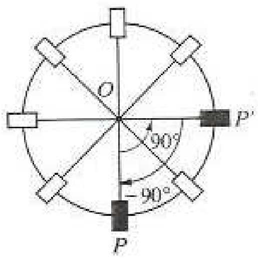


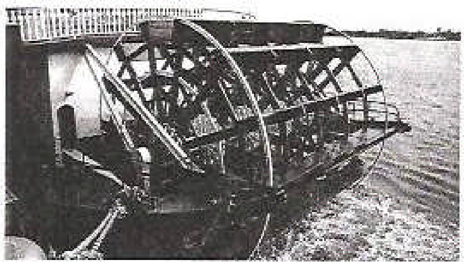
Figure 1

Applications : Résolution de problèmes réels avec la géométrie

<u>Exemple 10 : Rotations</u>.

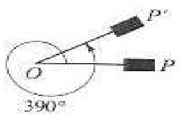
Une rotation est une transformation occasionnée par le fait de tourner une roue à palettes par exemple. Quand la roue se déplace, chaque palette tourne vers une nouvelle position. Quand la roue s'arrête, la nouvelle position de la palette (P') peut être représentée mathématiquement comme l'image de la position initiale (P).

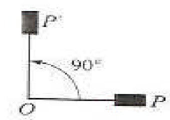


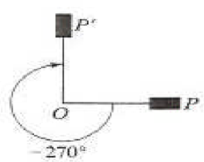


Pour une rotation de $90°$ de centre le point O, on peut l'écrire $\mathcal{R}$ **(O, -**90). Une rotation au sens des aiguilles d'une montre est considérée comme négative, et une rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre est considérée comme positive. Si la palette est tournée dans le sens des aiguilles d'une montre de la position 0 jusqu'à ce qu'il atteigne la position de la palette 2, la rotation est notée par $\mathcal{R}$ (O, -90). Pour éviter la confusion avec la lettre R utilisée pour la réflexion, nous utilisons la lettre R en italique ($\mathcal{R}$) pour la rotation.

Une rotation complète de $360°$ de centre le point O, fait tourner une position P autour de O jusqu'à la position P', avec $P' = P$. La figure ci-dessous à gauche montre une rotation de $390°$ par rapport au point O. Puisque qu'une rotation de $390°$ est plus grande de $30°$ de plus qu'une rotation complète, l'image du point P sur une rotation de $390°$ est la même lorsque la rotation est de $30°$; ainsi la position des images est la même. De même, la figure ci-dessous à l'extrême droite montrant une rotation de $90°$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre est la même que celle de $270°$ dans le sens des aiguilles d'une montre parce qu'elles ont le même effet sur le point P.







$\mathcal{R}_{O,\,390} = \mathcal{R}_{O,\,30}$; NB : 390 – 360 = 30 $\mathcal{R}_{O,\,90} = \mathcal{R}_{O,\,-270}$; aussi : 90 – 360 = -270

Activité

Discute avec tes camarades de cinq (5) utilisations de la géométrie que tu as observées.

Un Projet pour le Gouvernement du Sénégal
Financé par L'Initiative pour l'Éducation en Afrique AEI de l'USAID
Programme des Manuels Scolaires et Autres Outils d'Apprentissage TLMP

RFA (TLMP): M/OAA/GRO-05-1592
CA Référence: RLA-A-00-05-00084-00

VENTE INTERDITE

ISBN 978-0-9797743-2-4